# مدل‌سازی تحلیلی فرآیند آشام مجدد بین ماتریس‌ها در فرآیند ریزش ثقلی در ناحیه مورد هجوم گاز

**مهدی عباسی[1*]، مجتبی ایزدمهر[2]، محمد شریفی[1]، محمد حسین غضنفری[2]، علیرضا کاظمی[1] و شهاب گرامی[3]**

۱- دانشکده مهندسی نفت، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

۲- دانشکده مهندسی نفت، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

۳- پژوهشکده ازدیاد برداشت مخازن نفت و گاز، شرکت ملی نفت، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۹۴/۱۰/۲۷ تاریخ پذیرش: ۹۵/۴/۱۲

**چکیده**

مخازن کربناته شکاف‌دار بخش عمده ای از مخازن هیدروکربوری کشور ایران را تشکیل می‌دهند. تولید نفت از این مخازن عمدتا تحت تاثیر مکانیزم ریزش ثقلی است و انتقال نفت از بلوک بالایی به بلوک پایینی با توجه به چگونگی ارتباط بین بلوک‌ها میزان تولید را کنترل می‌کند، و این درحالی است که مطالعات تئوری محدودی از مدل‌سازی انتقال نفت از طریق آشام مجدد بین بلوک‌ها انجام شده است. در این مقاله ابتدا فرآیند ریزش ثقلی با در نظر گرفتن نیروی ریزش ثقلی و نیروی مویینگی برای یک بلوک ماتریس یک بعدی به‌صورت بدون بعد بسط داده می‌شود. سپس با استفاده از روش تبدیل لاپلاس، معادله مشتق جزئی مربوط به یک بلوک ماتریس با استفاده از شرایط اولیه و مرزی حل می‌شود. همچنین با تعمیم معادلات جریان جزئی به‌دست آمده برای یک دسته بلوک ماتریس به مدل‌سازی فرآیند آشام مجدد پرداخته می شود. در مرز بالایی بلوک ماتریس، دبی نفت ورودی به ماتریس تابعی از زمان و در مرز پایینی آن اشباع بدون بعد نفت برابر یک در نظر گرفته شده است. در زمان اولیه نیز اشباع بدون بعد نفت در تمام ماتریس برابر با یک فرض شده است. در نهایت با استفاده از معادلات اشباع، دبی و تولید تجمعی بدون بعد به بررسی فرآیند ریزش ثقلی و پدیده آشام مجدد پرداخته شده است. لازم به ذکر است که تمام راه حل‌های ارایه شده برای این مساله تاکنون به‌صورت عددی و یا نیمه تحلیلی بوده است [1] درحالی‌که راه حل ارائه شده در این مقاله به‌صورت کاملا تحلیلی می‌باشد.

**کلمات کلیدی: مخازن شکاف‌دار، ناحیه مورد هجوم گاز، ریزش ثقلی، آشام مجدد، حل تحلیلی و ناحیه مورد هجوم گاز.**

*مسؤول مکاتبات
آدرس الکترونیکی m.abbasi1370@gmail.com

## مقدمه

مخـازن نفتـی شـکاف‌دار به‌صـورت سیسـتمی شـامل بلوک‌هایـی از ماتریـس و شـبکه شـکاف در نظـر گرفتـه می‌شـوند. این‌گونـه از مخـازن شـامل دو محیـط بـا خصوصیـات فیزیکـی متفـاوت هسـتند: ۱- محیـط ماتریـس بـا تخلخـل نسـبتا بـالا و تراوایـی پاییـن کـه قسـمت عمـده‌ای از نفـت درجـای مخـزن را در خـود جـای داده اسـت. ۲- محیـط شـکاف بـا تراوایـی نسـبتا بـالا و تخلخـل پاییـن کـه سـبب سـهولت حرکـت سـیال به‌سـمت چـاه تولیـدی می‌شـوند. پدیـده ریـزش ثقلـی یکـی از مهم‌تریـن فرآیندهـای تولیـد از مخـازن شـکاف‌دار و معمولـی اسـت کـه در آن نیـروی گرانـش مهم‌تریـن نیـروی پیشـران در تولیـد اسـت. فرآینـد ریـزش ثقلـی در مراحـل اولیـه تولیـد بـه هنـگام توسـعه میـدان و همچنیـن هنـگام تزریـق گاز بـه منظـور فرآیندهـای بهبـود و افزایـش برداشـت نفـت اتفـاق می‌افتـد [۲]. طبـق کارهـای آزمایشـگاهی انجـام شـده بـر روی سـتون‌های ماسـه‌ای، مشـاهده شـد کـه فرآینـد ریـزش ثقلـی تاثیـر زیـادی بـر میـزان بازیافـت نفـت از ایـن سـتون‌ها دارد [۳]. همچنیـن مشـاهدات میدانـی نتایـج مشـابه‌ای را نشـان می‌دهنـد [۴ و ۵]. در ناحیـه مـورد هجـوم گاز دسـته‌ای از بلوک‌هـای ماتریـس بـرروی هـم قـرار گرفته‌انـد کـه عـلاوه بـر فرآینـد ریـزش ثقلـی در بلوک‌هـای ماتریـس، پدیـده آشـام مجـدد نیـز رخ می‌دهـد و بـرای بررسـی ایـن پدیـده و پارامترهـای تاثیرگـزار بـر آن مطالعـات آزمایشـگاهی مختلفـی انجـام شـده اسـت [۶- ۸]. لـورت و لوییـس بـه بررسـی مفاهیـم پایـه‌ای فرآینـد ریـزش ثقلـی پرداختنـد [۹ و ۱۰]. در کاردول و پارسـون توانسـتند بـرای اولیـن بـار یـک مـدل تحلیلـی بـرای بررسـی فرآینـد ریـزش ثقلـی ارائـه کننـد. مـدل تحلیلـی کاردول و پارسـون توسـط هرمـن داکسـترا بهبـود یافـت [۴]. پاوونـه و همـکاران بـه منظـور پیش‌بینـی توزیـع اشـباع و میـزان بازیافـت سـیال از یـک نمونـه، معادلـه مشـتق جزئـی فرآینـد ریـزش ثقلـی را به‌صـورت تحلیلـی حـل کردنـد [۱۱]. پِـری در کارهـای خـود دربـاره فرآینـد ریـزش ثقلـی در یـک دسـته بلـوک یـک بعـدی، فـرض کـرد کـه نفـت خـارج شـده از ماتریـس بالایـی از طریـق فرآینـد آشـام توسـط ماتریـس پایینـی مکیـده می‌شـود [۱۲]. سـعیدی فرآینـد جریـان بلـوک بـه بلـوک را در سـتونی از بلوک‌هـای ماتریـس کـه بـا هـم در تمـاس نبودنـد مـورد بررسـی قـرارداد [۱۳]. فیروزآبـادی و ایشـیموتو بـا اسـتفاده از روش جداسـازی متغیرهـا معادلـه خطـی شـده فرآینـد ریـزش ثقلـی را بـرای شـروط مـرزی مختلـف حـل کردنـد و همچنیـن بـه بررسـی فرآینـد ریـزش ثقلـی همـراه بـا پدیـده آشـام مجـدد پرداختنـد [۱]. آن‌هـا بـرای ایـن کار دسـته‌ای از بلوک‌هـای ماتریـس کـه در ابتـدا به‌طـور کامـل اشـباع از نفـت و توسـط گاز احاطـه شـده‌اند را در نظـر گرفتنـد. لنگـرون و همـکاران بـه بررسـی فرآینـد ریـزش ثقلـی از دیـد محاسـبه فشـار موینگـی پرداختنـد [۱۴]. کـرا و فیروزآبـادی معادلـه ریـزش ثقلـی را برحسـب پتانسـیل موینگـی بیـان و معادلـه غیـر خطـی را به‌صـورت عـددی حـل نمودنـد. همچنیـن در آن سـال کلائیـدو و فیروزآبـادی بـه مطالعـه فرآینـد ریـزش ثقلـی در محیـط متخلخـل لایـه‌ای پرداختنـد [۱۵]. اسـکچتر و ژو بـا اسـتفاده از مفهـوم جریـان سـیال و ارتبـاط دادن آن با قانون دارسـی توانسـتند یـک عبـارت جدیـد بـرای محاسـبه بازیافـت نفـت طـی فرآینـد ریـزش ثقلـی و به‌صـورت تابعـی از زمـان بیـان نماینـد [۱۶]. لـی و هـورن ادعـا کردنـد کـه مکانیـزم بازیافـت در فرآینـد ریـزش ثقلـی هماننـد فرآینـد آشـام اسـت [۱۷]. در نهایـت آن‌هـا توانسـتند بـا اسـتفاده از مـدل آرنوفسـکی کـه پیشـتر بـرای فرآینـد آشـام مـورد اسـتفاده قـرار می‌گرفـت، مدلـی بـرای فرآینـد ریـزش ثقلـی ارائـه دهنـد [۱۸]. در ایـن مـدل؛ ارتبـاط بیـن بازیافـت نفـت و زمـان به‌صـورت یـک تابـع نمایـی بیـان می‌شـود. میگوئـل هرنانـدز و همـکاران پارامترهـای بـدون بعـد را بـرای بررسـی فرآینـد ریـزش ثقلـی توسـعه دادنـد و پارامترهـای تاثیرگـذار بـر ایـن فرآینـد را مشـخص نمودنـد [۱۹]. دوناتـو و همـکاران بـرای بررسـی فرآینـد ریـزش ثقلـی بـه آنالیـز تحلیلـی و عـددی بازیافـت نفـت در یـک محیـط متخلخـل یـک

بعـدی پرداختنـد [۲۰]. آن‌هـا بـرای بررسـی صحـت مـدل عـددی خـود، نتایـج آن را بـا نتایـج آزمایشـگاهی پـدرا و همـکاران مقایسـه نمودنـد [۲۱]. نبـی پـور و همـکاران مـدل جریـان دوفـازی را توسـعه و بـا حـل عـددی آن توانسـتند توزیـع اشـباع و دبـی بازیافـت نفـت در یـک محیـط متخلخـل لایـه‌ای و تحـت ریـزش ثقلـی نفـت و گاز را پیش‌بینـی نماینـد [۲۲]. در سـال ۲۰۰۸ هوتیـت و فیروزآبـادی بـا اسـتفاده از روش المان‌هـای محـدود یـک فرمولاسـیون جدیـد را در فضـای سـه بعـدی ارائـه کردنـد کـه در آن سـرعت کل سـیال به‌صـورت عبارتـی از گرادیـان پتانسـیل فـاز تـر و مویینگـی تعریـف می‌شـد [۲۳].

در ایـن مقالـه ابتـدا فرآینـد ریـزش ثقلـی در حضـور نیـروی مویینگـی بـرای یـک بلـوک ماتریـس یـک بعـدی به‌صـورت بـدون بعـد بسـط داده مـی شـود و معادلـه مشـتق جزئـی مربـوط بـه یـک بلـوک ماتریـس بـا شـرایط اولیـه و مـرزی مشـخص به‌دسـت می‌آیـد. سـپس بـرای مدل‌سـازی فرآینـد آشـام مجـدد دسـته‌ای از بلوک‌هـای ماتریـس در نظـر گرفتـه می‌شـود به‌طوری‌کـه نفـت خروجـی از یـک ماتریـس توسـط ماتریـس پاییـن آن آشـام شـده و شـرط مـرزی بالایـی ماتریـس پاییـن، دبـی نفـت خروجـی از ماتریـس بالایـی اسـت. بـا اسـتفاده از روش تبدیـل لاپـلاس بـه حـل معادلـه مشـتق جزئـی بـا شـرایط مـرزی دبـی نفـت به‌صـورت تابعـی از زمـان و اشـباع بـدون بعـد نفـت برابـر بـا یـک پرداختـه می‌شـود. در آخـر سـعی شـده اسـت براسـاس مـدل نیمـه تحلیلـی فرآینـد ریـزش ثقلـی و آشـام مجـدد فیروزآبـادی [۱] مـدل کامـلا تحلیلـی ایـن فرآینـد را ارائـه کنیـم.

**معادله جریان سیال بلوک ماتریس**

طبـق مـدل ریـزش ثقلـی بلـوک ماتریـس یـک بعـدی، معادلـه جریـان جزئـی یـک بعـدی بـرای سیسـتم نفـت و گاز غیـر تراکم‌پذیـر در حضـور نیـروی مویینگـی و گرانـش به‌صـورت زیـر اسـت:

$$\frac{\partial S_o}{\partial t}=\frac{k}{\phi\mu_o}\frac{\partial}{\partial z}\left[-k_{ro}\frac{\partial P_c}{\partial z}+k_{ro}\Delta\rho\frac{g}{g_c}\right] \quad (۱)$$

پارامترهای بدون بعد:

$$k_{roD}=\frac{k_{ro}}{k_{ro}^{o}} \quad (۲)$$

$$S_{oD}=\frac{S_o-S_{or}}{1-S_{or}-S_{wi}} \quad (۳)$$

$$P_{cD}=\frac{P_c}{\Delta\rho\frac{g}{g_c}h} \quad (۴)$$

کـه در آن $k^{o}_{ro}$ مقـدار تراوایـی نسـبی انتهایـی نفـت و $P_{cD}$ بیان‌گـر نسـبت نیـروی مویینگـی بـه نیـروی گرانـش اسـت. حـال بـا در نظـر گرفتـن تراوایـی نسـبی و فشـار مویینگـی بـدون بعـد به‌صـورت زیـر:

$$k_{roD}=S_{oD} \quad (۵)$$

$$P_{cD}=-P_{cD}^{o}\ln(S_{oD}) \quad (۶)$$

بـا تعریف زمان و مکان بدون بعد به‌صورت زیر:

$$t_D=\frac{kk_{ro}^{o}P_{cD}^{o}\Delta\rho\frac{g}{g_c}}{h\phi\mu_o\left(1-S_{or}-S_{wi}\right)}t \quad (۷)$$

$$z_D=\frac{z}{h} \quad (۸)$$

کـه در آن $z_D=\frac{z}{h}$ بیانگـر میـزان بازیافـت نفـت از بلـوک ماتریـس اسـت. حـال بـا اعمـال پارامترهـای بـدون بعـد، معادلـه بـدون بعـد فرآینـد ریـزش ثقلـی به‌صـورت زیـر خواهـد شـد:

$$\frac{\partial S_{oD}}{\partial t_D}=\frac{\partial^2 S_{oD}}{\partial z_D^2}+2\eta\frac{\partial S_{oD}}{\partial z_D} \quad ,\eta=\frac{1}{2P_{cD}^{o}} \quad (۹)$$

**تعریف دبی بدون بعد:**

بـا اسـتفاده از معادلـه پیوسـتگی اگـر دبـی بـدون بعـد نفـت بـه سـمت پاییـن را مثبـت در نظـر بگیریـم، داریـم:

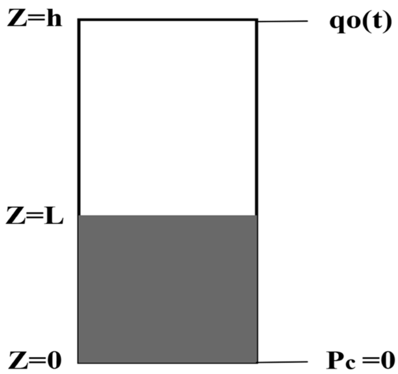
$$q_{oD}=\frac{\partial S_{oD}}{\partial z_D}+2\eta S_{oD} \quad (۱۰)$$

دبـی بـدون بعـد نفـت خروجـی از ماتریـس بیانگـر نـرخ تابـع انتقـال بـدون بعـد بیـن ماتریـس و شـکاف می‌باشـد.

همان‌طـور کـه در شـکل ۱ مشـاهده می‌شـود، شـرایط اولیـه و مـرزی به‌صـورت زیـر اسـت:

$$S_{oD}\left(z_D,t_D=0\right)=1 \quad (۱۱\text{-الف})$$

$$S_{oD}\left(z_D=0,t_D\right)=1 \quad (۱۱\text{-ب})$$




**شکل ۱** بلوک ماتریس یک بعدی همراه با شرایط مرزی. ارتفاع مدل h و عمق نفوذ گاز برابر با L است.

$$\left.\frac{\partial S_{oD}}{\partial z_D}+2\eta S_{oD}\right|_{z_D=1}=q_{oD}(t_D) \qquad (۱۱\text{-ج})$$

با توجه به ناهمگن بودن شروط مرزی، معادله را به دو قسمت وابسته و مستقل از زمان تقسیم می‌کنیم:

$$S_{oD}=S_{oD(ss)}\left(z_D\right)+S_{oD(uss)}\left(z_D,t_D\right) \qquad (۱۲)$$

**معادله مستقل از زمان:**

معادله جریان سیال در درون ماتریس در حالت مستقل از زمان به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 S_{oD(ss)}}{\partial z_D^2}+2\eta\frac{\partial S_{oD(ss)}}{\partial z_D}=0 \qquad (۱۳)$$

جواب معادله بالا به‌صورت زیر است که در آن $q^o_{oD}$ دبی بدون بعد نفت ورودی از بالای ماتریس در زمان $t_D=0$ است.

$$S_{oD(ss)}=e^{-2\eta z_D}+\frac{q^o_{oD}}{2\eta}(1-e^{-2\eta z_D}) \qquad (۱۴)$$

**معادله وابسته به زمان:**

با توجه به قسمت مستقل از زمان، معادله وابسته به زمان به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 S_{oD(uss)}}{\partial z_D^2}+2\eta\frac{\partial S_{oD(uss)}}{\partial z_D}-\frac{\partial S_{oD(uss)}}{\partial t_D}=0 \qquad (۱۵)$$

با توجه به معادله (۱۱-الف) گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله ۱۵ داریم:

$$\frac{\partial \tilde{S}^2_{oD(uss)}}{\partial z_D^2}+2\eta\frac{\partial \tilde{S}_{oD(uss)}}{\partial z_D}-s\tilde{S}_{oD(uss)}+\left[1-e^{-2\eta z_D}-\frac{q^o_{oD}}{2\eta}(1-e^{-2\eta z_D})\right]=0 \qquad (۱۶)$$

حال از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$w=\tilde{S}_{oD(uss)}-\frac{1-e^{-2\eta z_D}-\frac{q^0_{oD}}{2\eta}(1-e^{-2\eta z_D})}{s} \qquad (۱۷)$$

بعد از اعمال تغییر متغیر، معادله ۱۶ به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z_D^2}+2\eta\frac{\partial w}{\partial z_D}-sw=0 \qquad (۱۸)$$

ومعادلات (۱۱-ب) و (۱۱-ج) نیز به‌صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$w\left(z_D=0,t_D\right)=0 \qquad (۱۹\text{ -الف})$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z_D}+2\eta w\right|_{z_D=1}=-\frac{2\eta}{s}+q_{oD}(s) \qquad (۱۹\text{-ب})$$

معادله دیفرانسیل ۱۸ دارای یک معادله مشخصه به‌صورت زیر است:

$$x^2+2\eta x-s=0 \qquad (۲۰)$$

جواب‌های این معادله مشخصه به‌صورت زیر خواهد بود.

$$x_{1,2}=-\eta\pm\sqrt{\eta^2+s}=-\eta\pm\Delta \qquad (۲۱)$$

براساس جواب‌های معادله مشخصه جواب معادله دیفرانسیل ۲۰ به‌صورت زیر است.

$$w(z_D)=C_1e^{x_1z_D}+C_2e^{x_2z_D} \qquad (۲۲)$$

با اعمال شرایط مرزی اول و دوم و محاسبه $C_1$ و $C_2$، معادله ۱۸ به‌صورت زیر خواهد شد:

$$w(z_D)=e^{\eta(1-z_D)}\frac{\left(-\frac{2\eta}{s}+\tilde{q}_{oD}(s)\right)\sinh(\Delta z_D)}{(\eta\sinh(\Delta)+\Delta\cosh(\Delta))} \qquad (۲۳)$$

با استفاده از لاپلاس معکوس و قضیه کانوولوشون به معادله ۲۳ خواهیم رسید:

$$S_{oD}=e^{-2\eta z_D}+\frac{q^o_{oD}}{2\eta}(1-e^{-2\eta z_D})+e^{\eta(1-z_D)}$$
$$(-2\eta+q_{oD}(t_D))*L^{-1}\left\{\frac{\sinh(\Delta z_D)}{\eta\sinh(\Delta)+\Delta\cosh(\Delta)}\right\} \qquad (۲۴)$$

برای محاسبه لاپلاس معکوس تابع F(s) کافیست که تمام باقی‌مانده‌های تابع $e^{st}F(s)$ در قطب‌های تابع F(s) که مخرج تابع در آن نقاط صفر می‌شوند را با یکدیگر جمع کنیم [۲۴]. با قرار دادن $\Delta=i\lambda_n$ یا $s=-(\lambda_n^2+\eta^2)$ قطب‌های تابع F(s) محاسبه می‌شود به‌طوری‌که در معادله زیر صدق کند:

$$\eta\sin(\lambda_n)+\lambda_n\cos(\lambda_n)=0 \qquad (۲۵)$$

لاپلاس معکوس تابع F(s) و باقی‌مانده‌های تابع $e^{st}F(s)$ در نقطه $s=-(\lambda_n^2+\eta^2)$ برابر است با:

$$L^{-1}\{F(s)\}=\mathrm{Res}\left\{e^{st}F(s),-\left(\lambda_n^2+\eta^2\right)\right\}$$
$$=2\frac{\left(\lambda_n^2+\eta^2\right)\sin\left(\lambda_n\right)\sin(\lambda_n z_D)}{\lambda_n^2+\eta^2+\eta}e^{-\left(\lambda_n^2+\eta^2\right)t_D} \qquad (۲۶)$$

با استفاده از معادله ۲۴ و ۲۶، معادله تابع اشباع برحسب زمان و مکان بدون بعد به‌صورت زیر خواهد بود:

$$S_{oD}=e^{-2\eta z_D}+\frac{q_{oD}^{o}}{2\eta}(1-e^{-2\eta z_D})+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\eta z_D}\sin(\lambda_n z_D)\left(\lambda_n^2+\eta^2\right)G(t_D) \qquad (۲۷)$$

که در آن:

$$A_n=\frac{4\eta e^{\eta}\sin\left(\lambda_n\right)}{\lambda_n^2+\eta^2+\eta} \qquad (۲۸)$$

$$G(t_D)=\int_0^{t_D}\left(-1+\frac{q_{oD}(\tau)}{2\eta}\right)e^{-\left(\lambda_n^2+\eta^2\right)(t_D-\tau)}d\tau \qquad (۲۹)$$

با استفاده از معادله (۱۰) می‌توان دبی بدون بعد را نیز محاسبه کرد:

$$q_{oD}=q_{oD}^{o}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\eta z_D}\left(\lambda_n^2+\eta^2\right)$$
$$\left[\eta\sin(\lambda_n z_D)+\lambda_n\cos(\lambda_n z_D)\right]G(t_D) \qquad (۳۰)$$

با استفاده از رابطه زیر نیز می‌توان تولید تجمعی بدون بعد را محاسبه کرد:

$$N_{pD}=\int_0^{t_D}q_{oD}dt'_D=q_{oD}^{o}t_D+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\eta z_D}\left(\lambda_n^2+\eta^2\right)$$
$$\left[\eta\sin(\lambda_n z_D)+\lambda_n\cos(\lambda_n z_D)\right]\int_0^{t_D}G(t'_D)dt'_D \qquad (۳۱)$$

معادله ۳۱ برای دو حالت زیر حل شده است.

**یک بلوک ماتریس مستقل**

اگر یک بلوک ماتریس مستقل را در نظر بگیریم به‌طوری‌که از بالای بلوک دبی ورودی ثابت نفت یعنی $q_{oD}^{1}$ ثابت را داشته باشیم، آن‌گاه معادله توزیع اشباع، دبی و تولید بدون بعد آن به‌صورت زیر خواهد بود:

$$S_{oD}=e^{-2\eta z_D}+\frac{q_{oD}^{1}}{2\eta}(1-e^{-2\eta z_D})+$$
$$\left(1-\frac{q_{oD}^{1}}{2\eta}\right)\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\eta z_D}\sin(\lambda_n z_D)e^{-\left(\lambda_n^2+\eta^2\right)t_D} \qquad (۳۲)$$

$$q_{oD}=q_{oD}^{1}+\left(1-\frac{q_{oD}^{1}}{2\eta}\right)\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\eta z_D}$$
$$\left[\eta\sin(\lambda_n z_D)+\lambda_n\cos(\lambda_n z_D)\right]e^{-\left(\lambda_n^2+\eta^2\right)t_D} \qquad (۳۳)$$

$$N_{pD}=q_{oD}^{1}t_D+\left(1-\frac{q_{oD}^{1}}{2\eta}\right)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n e^{-\eta z_D}\left[\eta\sin(\lambda_n z_D)+\lambda_n\cos(\lambda_n z_D)\right]}{\left(\lambda_n^2+\eta^2\right)}$$
$$\left[1-e^{-\left(\lambda_n^2+\eta^2\right)t_D}\right] \qquad (۳۴)$$

اگر دسته‌ای از بلوک‌های مستقل که توسط گاز احاطه شده‌اند و جریان نفت آنها فقط به شکاف می‌ریزد را در نظر بگیریم، در این حالت $q_{oD}^{1}=0$ است.

**دسته‌ای از بلوک‌های ماتریس**

در این حالت به بررسی عملکرد تخلیه N دسته بلوک مساوی که در ابتدا اشباع از نفت و توسط گاز احاطه شده‌اند می‌پردازیم. به‌دلیل پدیده آشام مجدد، نفت خارج شده از بلوک ماتریس بالایی توسط بلوک پایینی آشام می‌شود. با فرض صفر بودن فشار مویینگی شکاف شرایط مرزی بلوک اول مانند حالت اول و شرایط مرزی بلوک Nام به‌صورت زیر خواهد بود:

$$S_{oD}\left(z_D=0,t_D\right)=1 \qquad (۳۵\text{-الف})$$

$$\left.\frac{\partial S_{oD}}{\partial z_D}+2\eta S_{oD}\right|_{z_D=1}=\left.q_{oD\,N-1}\right|_{z_D=0}(t_D) \qquad (۳۵\text{-ب})$$

در نهایت رابطه تحلیلی توزیع اشباع، دبی و تولید تجمعی بدون بعد بلوک ماتریس ام به‌صورت زیر خواهد بود:

$$S_{oD}^{N}=e^{-2\eta z_D}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(N-1)A_n\lambda_n}{2\eta}(1-e^{-2\eta z_D})$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\eta z_D}\sin(\lambda_n z_D)\left(\lambda_n^2+\eta^2\right)G_N(t_D) \qquad (۳۶)$$

$$q_{oD}^{N}=\sum_{n=1}^{\infty}(N-1)A_n\lambda_n+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\eta z_D}\left(\lambda_n^2+\eta^2\right)$$
$$\left[\eta\sin(\lambda_n z_D)+\lambda_n\cos(\lambda_n z_D)\right]G_N(t_D) \qquad (۳۷)$$

$$N_{pD}^{N}=\sum_{n=1}^{\infty}(N-1)A_n\lambda_n t_D+\int_0^{t_D}\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\eta z_D}$$
$$\left(\lambda_n^2+\eta^2\right)\left[\eta\sin(\lambda_n z_D)+\lambda_n\cos(\lambda_n z_D)\right]G_N(t'_D)\,\mathrm{d}t'_D \qquad (۳۸)$$

که در آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G_N(t_D)=G_1(t_D)+\int_0^{t_D}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n\lambda_n\left[N-2+\left(\lambda_n^2+\eta^2\right)G_{N-1}(\tau)\right]}{2\eta}\right)e^{-\left(\lambda_n^2+\eta^2\right)(t_D-\tau)}\right]d\tau \qquad (۳۹)$$

## نتایج و بحث

بـه منظـور بررسـی پدیـده آشـام مجـدد در محیـط متخلخـل شـکاف‌دار، در ایـن قسـمت بـه ارائـه نمونه‌هـای عـددی براسـاس معـادلات ذکـر شـده در قسـمت قبـل می‌پردازیـم. خـواص سـنگ و سـیال در نظـر گرفتـه شـده بـرای بلـوک ماتریـس در جـدول ۱ آمـده اسـت. بـا توجـه بـه مقادیـر ذکـر شـده در جـدول ۱ و بـا اسـتفاده از رابطـه (۱۰) مقـدار $\eta = 0.4$ اسـت، بنابرایـن حداکثـر دبـی بـدون بعـد نفـت خروجـی از ماتریـس برابـر ۰/۸ اسـت.

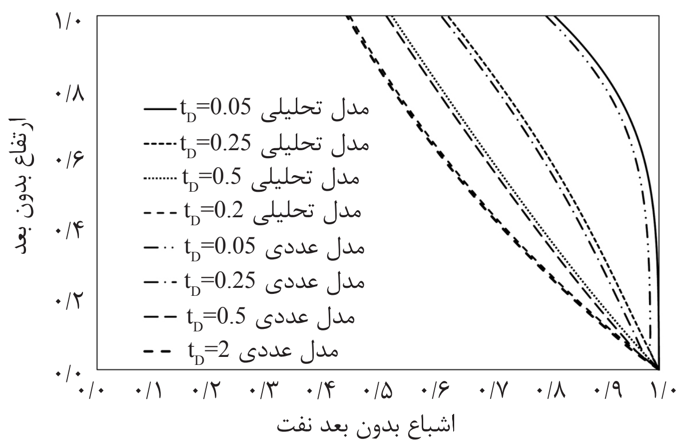
### یک بلوک ماتریس مستقل

در ایـن حالـت بـا قرار دادن شـرط مـرزی دبـی ثابت نفت ورودی بـه بلـوک ماتریـس از بـالا می‌تـوان پدیـده آشـام مجـدد را مـدل کـرد کـه بـر توزیـع اشـباع نفـت درون ماتریـس نیـز تاثیـر می‌گـذارد. در شـکل ۱ شـماتیکی از نحـوه توزیـع اشـباع نفـت تعادلـی در دبی‌هـای مختلـف آورده شـده اسـت. شـکل ۲ توزیـع اشـباع نفـت بـدون را در زمان‌هـای بـدون بعـد مختلـف نشـان می‌دهـد. توزیـع اشـباع رسـم شـده در شـکل ۲ در زمـان $t_D = 2$ نشـان‌دهنده توزیـع اشـباع زمـان تعـادل اسـت، یعنـی زمانی‌کـه نیـروی مویینگـی و ریـزش ثقلـی بـا هـم برابـر می‌شـوند. همچنیـن بـه منظـور اعتبـار سـنجی مـدل تحلیلـی ارائـه شـده از مـدل عـددی کـه در مطالعـات پیشـین انجـام شـده بـود اسـتفاده شـد و همان‌طـور کـه در شـکل ۲ مشـاهده می‌شـود بیـن نمودارهـای توزیـع اشـباع تطابـق خوبـی را نشـان می‌دهـد کـه بـا گذشـت زمـان نتایـج ایـن دو مـدل تحلیلـی و عـددی بـر روی یکدیگـر منطبـق مـی شـوند [۱ و ۱۹].

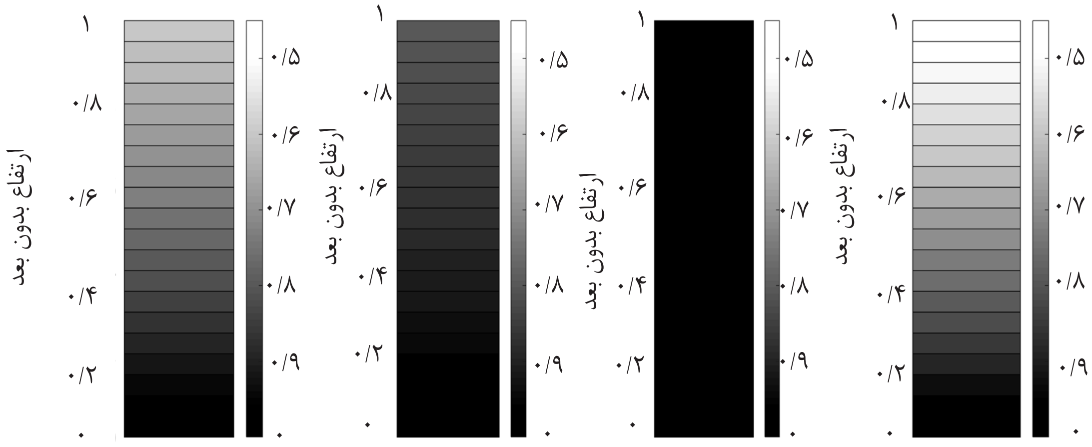
شـکل‌های ۳ و ۴ توزیـع اشـباع نفـت تعادلـی را در دبی‌هـای بـدون بعـد مختلـف نفـت ورودی بـه بلـوک ماتریـس نشـان می‌دهنـد، به‌طوری‌کـه اگـر دبـی آشـام مجـدد برابـر صفـر باشـد توزیـع اشـباع هماننـد حالـت اول اسـت و زمانی‌کـه دبـی آشـام مجـدد برابـر باشـد بیشـترین دبـی خروجـی از ماتریـس را داریـم. همان‌طـور کـه در شـکل ۴ مشـاهده می‌شـود زمانـی کـه دبـی آشـام مجدد برابـر ۰/۸ باشـد، بلـوک ماتریس همـواره اشـباع از نفـت باقـی می‌مانـد و اگـر دبـی آشـام مجـدد کمتـر از ۰/۸ باشـد اشـباع نفـت بلـوک ماتریـس کاهـش می‌یابـد. شـکل ۵ نمـودار دبـی بـدون بعـد نفـت بـر حسـب زمـان را در دبی‌هـای مختلـف آشـام مجـدد نشـان می‌دهـد. در شـکل ۵ در زمان‌هـای $t_D > ۲$ میـزان دبـی نفـت خروجـی از بلـوک ماتریـس در حالـت $q^1_{oD}$ بسـیار ناچیـز اسـت کـه نشـان‌دهنده زمـان تعـادل اسـت، یعنـی زمانـی کـه نیـروی موییـنگـی و ریـزش ثقلـی بـا هـم برابـر می‌شـوند.

**جدول ۱** خواص سنگ و سیال [۱].

| پارامترها | تخلخل ($\phi$) | تراوایی (k) | ارتفاع بلوک ماتریس (h) | چگالی نفت ($\rho_o$) | گرانروی نفت ($\mu_o$) | ضریب فشار مویینگی ($P_c^o$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| مقادیر | ۰/۳۸ | $۶\times۱۰^{-۱۲}$ | ۰/۶ | ۸۳۱ | $۱/۱\times۱۰^{-۲}$ | ۱/۶ |
| واحد | ٪ | $m^2$ | m | $kg/m^3$ | Pa.s | kPa |

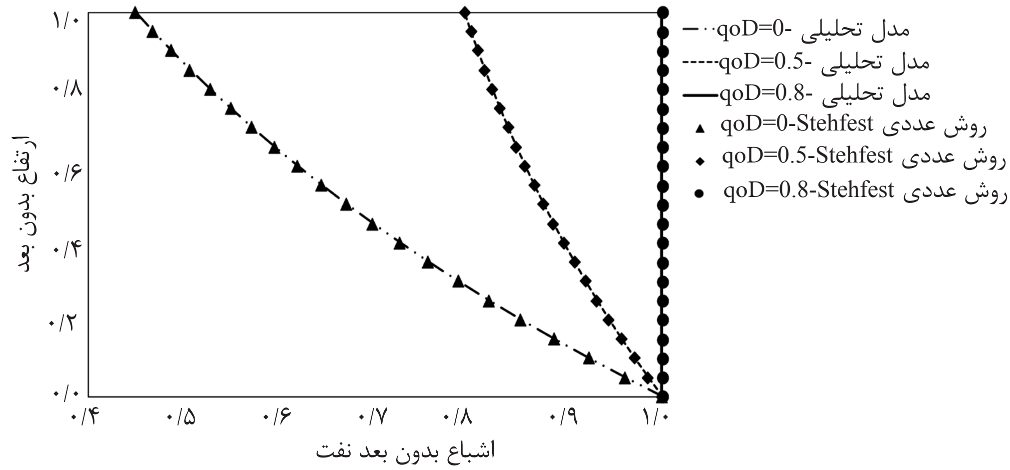



**شکل ۲** توزیع اشباع نفت بدون‌بعد برحسب زمان بدون بعد مختلف- مدل تحلیلی ارائه شده و مدل عددی [۱۹].

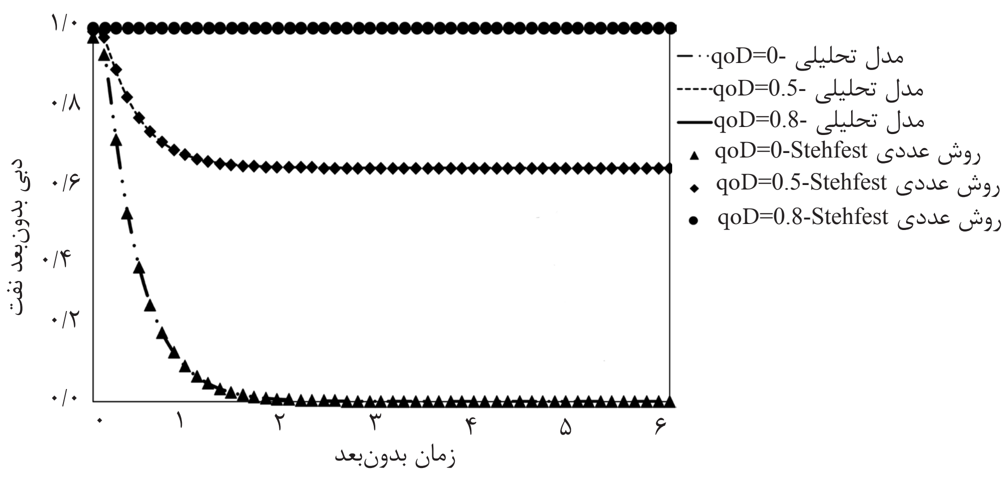



د) qoD =0.8 ج) qoD =0.5 ب) qoD =0.2 الف) qoD=0

**شکل ۳** شماتیک توزیع اشباع تعادلی بدون بعد نفت در دبی‌های مختلف ورودی نفت.




**شکل ۴** توزیع اشباع نفت در حال تعادل در دبی‌های بدون بعد مختلف نفت.

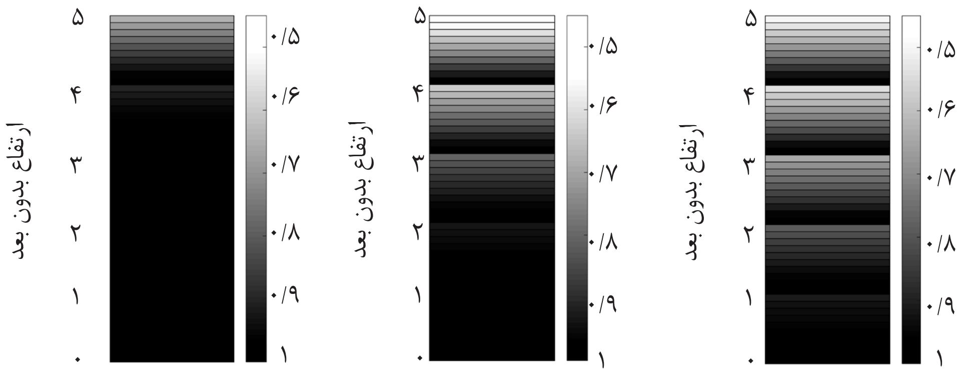



**شکل ۵** دبی بدون‌بعد نفت خروجی برحسب زمان بدون‌بعد.

همانند نتایج کارهای آزمایشگاهی سجادیان و سعیدی، تا زمانی‌که نفت چکیده شده بر روی مدل کمتر از دبی شاخص مدل باشد اشباع نفت، نفوذپذیری نسبی نفت و دبی ریزش نفت، افزایش می‌یابد. پس از یک مدت زمان گذرا، درجه اشباع نفت و توزیع آن در مدل چنان تغییر می‌یابد که بتواند معادل نفت وارد شده به مدل را از آن خارج کند و لذا هیچ‌گاه مدل به اشباع کامل نمی‌رسد. هرگاه نفت ریخته شده بر روی مدل مساوی یا بیشتر از دبی شاخص مدل باشد، پس از گذشت از مرحله گذرا، درجه اشباع نفت در داخل قسمت تخلیه شده مدل به حداکثر خود می‌رسد [۶ و ۱۲]. همچنین به منظور اعتبارسنجی مدل تحلیلی ارائه شده از روش عددی لاپلاس معکوس استهفست[1] که در مطالعات پیشیین انجام شده بود استفاده شد و همان‌طور که در شکل‌های ۴ و ۵ مشاهده می‌شود بین نمودار توزیع اشباع و دبی بدون بعد نفت مدل تحلیلی و روش عددی تطابق کاملی وجود دارد [۲۵]. نتایج مدل تحلیلی ارائه شده در این قسمت با نتایج مدل ریزش ثقلی فیروزآبادی مقایسه شده است [۱].

**دسته‌ای از بلوک‌های ماتریس**

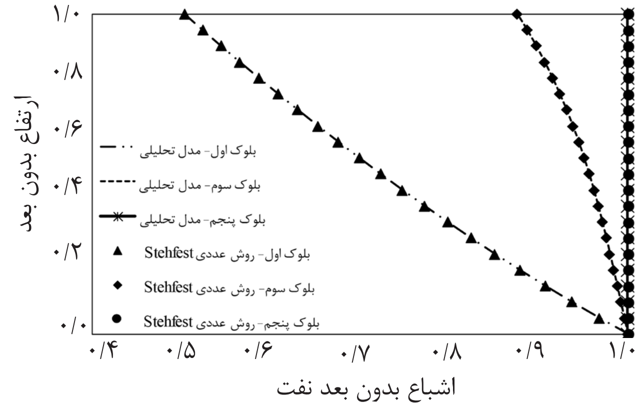
در این حالت ما ۸ بلوک ماتریس داریم که روی هم قرار گرفته‌اند و توسط شکاف جدا شده‌اند (شماره بلوک‌های ماتریس از بالا به پایین است). در شکل ۶ شماتیکی از نحوه توزیع اشباع نفت پنج بلوک ماتریس در سه زمان مختلف آورده شده است. نمودار توزیع اشباع هشت بلوک ماتریس در شکل‌های ۷ و ۸ آورده شده است. در زمان $t_D$=0.6 بلوک ماتریس اول قسمت قابل توجهی از نفت خود را تولید کرده است و این در حالی است که بلوک ماتریس پنجم تازه شروع به تولید می‌کند. شکل ۸ نمودار توزیع اشباع بلوک‌ها را در زمان $t_D$=1.5 نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است بلوک ماتریس اول به اشباع تعادلی خود رسیده و بلوک ماتریس سوم نیز قسمت قابل توجهی از نفت خود را تولید کرده است و بلوک پنج شروع به تخلیه شدن کرده است. همچنین به منظور اعتبار سنجی مدل تحلیلی ارائه شده از روش عددی لاپلاس معکوس استهفست که در مطالعات پیشیین انجام شده بود استفاده شد و همان‌طور که در ۷ و ۸ مشاهده می‌شود بین نمودار توزیع اشباع مدل تحلیلی و روش عددی لاپلاس معکوس تطابق کاملی وجود دارد [۱ و ۲۵]. شکل ۹ نمودار تولید تجمعی دسته بلوک ۲، ۴، ۶ و ۸ تایی و یک دسته بلوک که به‌صورت مستقل از هم هستند نمایش داده شده است (تولید تجمعی هر ماتریس در این حالت معادل با میزان نفت تولید شده از آن ماتریس است به‌طوری‌که در ماتریس‌های پایین‌تر با توجه به ریزش نفت ماتریس‌های بالاتر در آن‌ها، میزان تولید تجمعی آن‌ها افزایش می‌یابد).



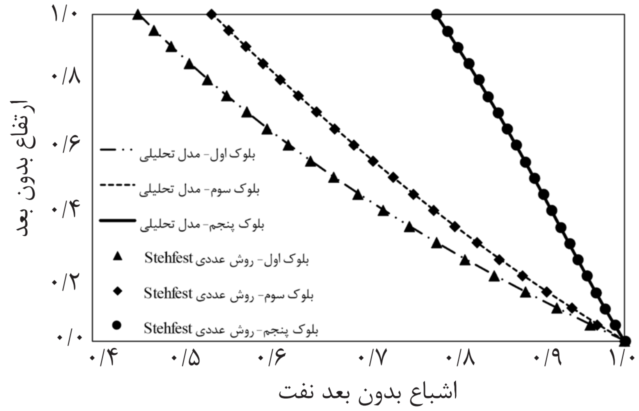

الف) $t_D$=0.3　ب) $t_D$=0.8　ج) $t_D$=1.2

**شکل ۶** شماتیک توزیع اشباع بدون‌بعد نفت پنج بلوک ماتریس در زمان‌های مختلف

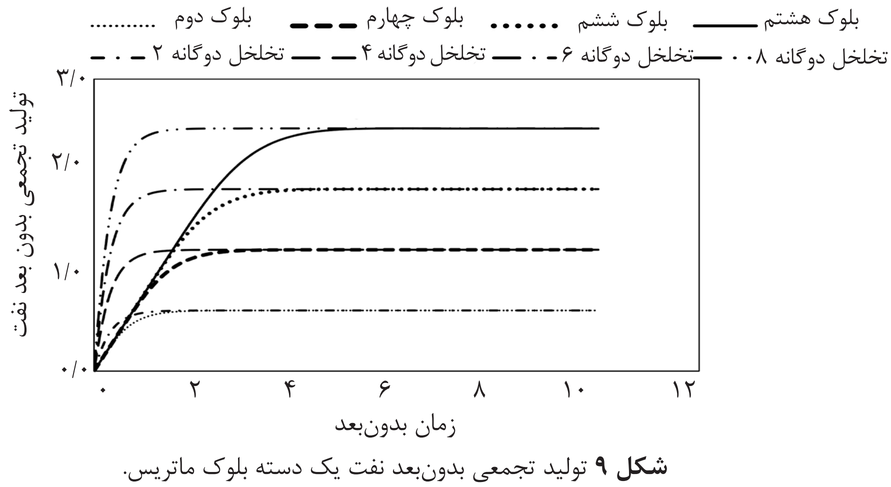
1. Stehfest




**شکل ۷** توزیع اشباع نفت بدون‌بعد یک دسته بلوک ماتریس در زمان بدون‌بعد $t_D$ =6.0.




**شکل ۸** توزیع اشباع نفت بدون‌بعد یک دسته بلوک ماتریس در زمان بدون‌بعد $t_D$ =5.1.




**شکل ۹** تولید تجمعی بدون‌بعد نفت یک دسته بلوک ماتریس.

با توجه به اینکه در حالت دسته بلوک مستقل از هم ماتریس‌ها با هم در ارتباط نیستند، این حالت همانند مدل تخلخل دوگانه در مخازن شکاف‌دار است و تولید تجمعی محاسبه شده برابر ضرب میزان تولید تجمعی یک بلوک ماتریس در تعداد بلوک‌های ماتریس یک دسته است.همان‌طور که در نمودار مشخص است فرآیند آشام مجدد تاثیر زیادی بر عملکرد یک دسته بلوک می‌گذارد، به‌طوری‌که با افزایش تعداد بلوک‌های ماتریس اختلاف تولید اولیه حالت آشام مجدد و ماتریس‌های مستقل افزایش می‌یابد، اما تاثیری بر میزان بازیافت نهایی ندارد. نتایج مدل تحلیلی ارائه شده با مدل نیمه

تحلیلی فرآیند آشام مجدد فیروزآبادی مقایسه شده است [۱].

## نتیجه‌گیری

در این مقاله حل تحلیلی مدل ریزش ثقلی با در نظر گرفتن نیروی ریزش ثقلی و نیروی مویینگی و برای دو حالت مختلف یک بلوک مستقل بدون نفت ورودی و همچنین با در نظر گرفتن نفت ورودی از بالای بلوک ماتریس و حالت یک دسته بلوک ماتریس با استفاده از روش لاپلاس ارائه شده است به‌طوری‌که، حل تحلیلی ارائه شده برای مدل‌سازی پدیده آشام مجدد در این مقاله آن را نسبت کارهای گذشته متمایز می‌سازد.

۱- وقتی نفت برروی یک ماتریس تخلیه شده ریزش کند میزان درجه اشباع در نزدیکی محل ریزش سریعاً افزایش خواهد یافت. درحالی‌که در نواحی پایین‌تر هنوز درجه اشباع نفت به مراتب کمتر است. میزان اختلاف بین نفت آشام شده و نفت تخلیه شده از ماتریس، کنترل‌کننده میزان تغییر در درجه اشباع نفت داخل ماتریس است. پس از طی شدن یک فاصله زمانی (که بستگی به شرایط اشباع اولیه و خواص فیزیکی سنگ و سیال ماتریس و میزان دبی نفت ریزش شده دارد) میزان درجه اشباع و نحوه توزیع نفت در داخل ماتریس چنان تنظیم می‌شود که می‌تواند نفت آشام شده را به همان میزان تخلیه کند و از آن زمان به بعد سیستم در حالت پایدار خواهد بود.

۲- زمانی‌که ماتریس زیرین کاملاً اشباع از نفت باشد، در صورتی‌که نفت خارج شده از ماتریس (ماتریس‌ها) فوقانی بیشتر از دبی شاخص ماتریس پایینی باشد به اندازه دبی شاخص آشام، و مابقی از روی سطوح جداری آن سر ریز می‌شود. در صورتی که نفت خارج شده از ماتریس (ماتریس‌ها) فوقانی کمتر از دبی شاخص باشد، تمامی آن آشام ماتریس پایینی شده و سرعت کاهش درجه اشباع ماتریس زیرین به همان اندازه کاهش می‌یابد. البته پس از یک دوره گذرا سیستم به حالت پایدار رسیده و هر چه نفت از ماتریس بالایی آشام می‌شود، همان مقدار نیز از ماتریس زیرین تخلیه می شود.

۳- فرآیند آشام مجدد تاثیر زیادی بر عملکرد یک دسته بلوک می‌گذارد، به‌طوری‌که با افزایش تعداد بلوک‌های ماتریس اختلاف تولید اولیه حالت آشام مجدد و حالت ماتریس‌های مستقل افزایش می‌یابد، اما تاثیری بر میزان بازیافت نهایی ندارد. به عبارتی دیگر می‌توان گفت که در فرآیند آشام مجدد به‌دلیل آن که نفت خروجی از ماتریس بالایی توسط ماتریس پایین آشام می‌شود و نفت به‌جای حرکت از سیستم شکاف از درون بلوک‌های ماتریس عبور می‌کند، که این باعث افزایش زمان رسیدن به بازیافت نهایی می‌شود اما تاثیری بر میزان آن ندارد.

## علائم و نشانه‌ها

$D$: بدون بعد

$\mu$: گرانروی سیال

$h$: ارتفاع بلوک ماتریس

$g$: فاز گاز

$\Delta$: دلتای معادله مشخصه

$K$: تراوایی ماتریس

$o$: فاز نفت

$\rho$: چگالی

$k_r$: تراوایی نسبی

$\phi$ : تخلخل

$N_p$: تولید تجمعی نفت

$P_c$: فشار مویینگی

$S$: متغیر تبدیل لاپلاس

$S_o$: اشباع نفت

## مراجع

[1]. Firoozabadi A. and Ishimoto K., *"Reinfiltration in practured porous media: part 1-one dimensional model",* SPE Advanced Technology Series, 2(02), pp.35-44, 1994.

[2]. Sajjadian V. A., Danesh A. and Tehrani D. H., "*Laboratory study of gravity drainage mechanism in fractured carbonate reservoir-reinfiltration*", In Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference. Society of Petroleum Engineers, 1999.

[3]. Li K. and Horne R. N., "*Modeling of oil production by gravity drainage",* Journal of Petroleum Science and Engineering, Vol. 60, Issue 3-4, pp.161-169, March 2008.

[4]. Dykstra, H., "*The prediction of oil recovery by gravity drainage",* Journal of Petroleum Technology, Vol. 30 No. 05, pp. 818-830, 1978.

[5]. King R. L., Stiles J. H. and Waggoner J. M., "*A reservoir study of the Hawkins Woodbine field*", In Fall Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME. Society of Petroleum Engineers, 1970.

[6]. Saidi A. M., Tehrani D. H. and Wit K., "*PD 10 (3) mathematical simulation of fractured reservoir performance, based on physical model experiments*", In 10th World Petroleum Congress. World Petroleum Congress, Janu. 1979.

[7]. Sajadian V. A., Danesh A. and Tehrani D. H., "*Laboratory studies of gravity drainage mechanism in fractured carbonate reservoir-capillary continuity*", In Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference. Society of Petroleum Engineers, 1998.

[8]. Firoozabadi A. and Markeset T., "*An experimental study of the gas-liquid transmissibility in fractured porous media*", SPE Reservoir Engineering, Vol. 9, No. 03, pp.201-207, 1994.

[9]. Leverett M., "*Capillary behavior in porous solids*", Transactions of the AIME, Vol. 142, No. 01, pp.152-169, 1941.

[10]. Lewis J. O., "*Gravity drainage in oil fields*", Transactions of the AIME, Vol. 155, No. 01, pp.133-154, 1944.

[11]. Pavone D., *"Gravity drainage at low interfacial tension*", 1989.

[12]. Prey D. and Lefebvre E., "*Gravity and capillarity effects on imbibition in porous media*", Society of Petroleum Engineers Journal, Vol. 18, No. 03, pp.195-206, 1978.

[13]. Saidi A. M. "*Reservoir engineering of fractured reservoirs (fundamental and practical aspects)*", Total; 1987.

[14]. Longeron D. G., Kalaydjian F. and Bardon C., "*Gas/oil capillary pressure: measurements at reservoir conditions and effect on gas-gravity drainage*", In SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Society of Petroleum Engineers, 1994.

[15]. Claudio A., Correa F. and Firoozabadi A., "*Concept of gravity drainage in layered porous media*", SPE Journal, Vol. 1, No. 01, pp.101-111, 1996.

[16]. Schechter D. S. and Guo B., "*Mathematical modeling of gravity drainage after gas injection into fractured reservoirs*", In Permian Basin Oil and Gas Recovery Conference. Society of Petroleum Engineers, 1996.

[17]. Li K. and Horne R. N., "*Modeling of oil production by gravity drainage*", Journal of Petroleum Science and Engineering, Vol. 60, No. 3, pp.161-169, 2008.

[18]. Aronofsky J. S., Masse L. and Natanson S. G., “*A model for the mechanism of oil recovery from the porous matrix due to water invasion in fractured reservoirs”,* Trans*,* AIME, Vol. 213, No. 17, p.14, 1958.

[19]. Miguel Hernandez N., Miller M. A. and Sepehrnoori K., “*Scaling parameters for characterization gravity drainage in naturally fractured reservoirs*”, Paper SPE 89990. In International Petroleum Conference, Mexico, 2004.

[20]. Di Donato G., Tavassoli Z. and Blunt M. J., *“Analytical and numerical analysis of oil recovery by gravity drainage*”, Journal of Petroleum Science and Engineering, Vol. 54, No. 1, pp.55-69, 2006.

[21]. Pedrera B., Bertin H., Hamon G. and Augustin A., “*Wettability effect on oil relative permeability during a gravity drainage*”, In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers, Janu. 2002.

[22]. Nabipour M., Zerafat M. M. and Ayatollahi S., “*Numerical modeling of the gas-oil gravity drainage process in stratified and fractured porous media*”, Journal of Porous Media, Vol. 11, No. 5, 2008.

[23]. Hoteit H. and Firoozabadi A., “*Numerical modeling of two-phase flow in heterogeneous permeable media with different capillarity pressures*”, Advances in Water Resources, Vol. 31, No. 1, pp.56-73, 2008.

[24]. Ozisik M. N., “*Heat Conduction*”, John Wiley & Sons, 1993.

[25]. Stehfest H., “*Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5]*”, Communications of the ACM, Vol. 13, No. 1, pp.47-49, 1970.