

# توسعه یک مدل ریاضی جهت تخمین ضریب هدایت گرمایی سنگ با استفاده از آنالوژی بین انتقال الکتریسیته و انتقال حرارت

ابوذر سلیمان‌زاده، عباس هلالی‌زاده\*، محمد جامی‌الاحمدی و بهرام سلطانی سولگانی

دانشکده نفت اهواز، دانشگاه صنعت نفت، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۴/۵

## چکیده

ضریب هدایت گرمایی سنگ‌هایی که به‌صورت جزئی اشباع شده‌اند، به عواملی مانند خواص ماتریس سنگ و فضای متخلخل، سیالات موجود در سنگ و میزان اشباع آن‌ها بستگی دارد. ساختار پیچیده فضای متخلخل، مشکلات زیادی را برای پیش‌بینی ضریب هدایت گرمایی سنگ در درجه اشباع مختلف ایجاد می‌کند. اگرچه محققین زیادی روابط تجربی و مدل‌های تئوری جهت تعیین ضریب هدایت گرمایی محیط‌های متخلخل و از جمله سنگ ارائه کرده‌اند، اما اکثر آن‌ها قابل کاربرد برای سنگ‌هایی است که تنها با یک سیال به‌صورت کامل اشباع شده باشند. می‌توان از آنالوژی بین انتقال الکتریسیته و انتقال حرارت درون سنگ، جهت توسعه مدل‌های پیش‌بینی کننده ضریب هدایت گرمایی سنگ در شرایط اشباع جزئی استفاده کرد. در این مقاله، ضریب هدایت گرمایی برای شش مغزه کربناته یکی از مخازن جنوب ایران در شرایط خلأ و برای چهار نمونه از این شش نمونه در شرایط اشباع ۱۰٪ با آب و چهار اشباع جزئی با آب (فاز دوم هوا)، توسط دستگاهی که در دانشگاه صنعت نفت طراحی و ساخته شده است، اندازه‌گیری شد. نتایج نشان می‌دهد که ضریب هدایت گرمایی در شرایط خلأ با افزایش تخلخل، کاهش می‌یابد. علاوه بر این، آزمایش‌ها روشن می‌سازد که ضریب هدایت گرمایی با افزایش درجه اشباع آب، افزایش می‌یابد. همچنین در این کار، یک مدل ریاضی برای پیش‌بینی ضریب هدایت گرمایی سنگ‌هایی که به‌صورت جزئی با آب اشباع شده‌اند، ارائه شد. اساس این مدل، آنالوژی بین انتقال الکتریسیته و انتقال حرارت است که نتایج آزمایشگاهی، کاربردی بودن آن را تأیید می‌کند.

**کلمات کلیدی:** ضریب هدایت گرمایی، رسانش الکتریکی، انتقال حرارت، آنالوژی، اشباع جزئی با آب

## مقدمه

ضریب هدایت گرمایی یک ماده توانایی آن ماده جهت هدایت گرماست. ضریب هدایت گرمایی سنگی که به صورت جزئی از سیالات مختلف اشباع شده باشد، موارد کاربرد زیادی در صنعت نفت دارد از جمله مطالعه بلوغ مخازن هیدروکربوری [۱]، عملیات حفاری، عملیات نمودارگیری [۲] و روش‌های ازدیاد برداشت گرمایی [۳]. ضریب هدایت گرمایی سنگ ( $\lambda$ ) به عوامل متعددی نظیر خواص ماتریس سنگ (شامل ترکیبات کانی‌شناسی سنگ، شکل دانه‌ها، اندازه دانه‌ها، سیمان شدگی) [۷-۴]، خواص فضای متخلخل (شامل مقدار تخلخل، نوع تخلخل، شکل منافذ، توزیع منافذ) [۸-۱۱]، سیالات موجود در منافذ و درجه اشباع هر کدام از سیالات [۱۴-۱۲] بستگی دارد. همچنین، این پارامتر به دما و استرس وارده بر سنگ وابسته است [۱۰ و ۱۳]. پیش‌بینی ضریب هدایت گرمایی سنگ به دلیل ساختار پیچیده فضای متخلخل آن با عدم قطعیت زیادی همراه است. روش‌های مختلف اندازه‌گیری، روابط تجربی و مدل‌های تئوری متفاوتی برای تعیین ضریب هدایت گرمایی ارائه شده است، اما اغلب آن‌ها مربوط به سنگ‌هایی است که به صورت کامل با یک سیال اشباع شده‌اند [۲ و ۱۵].

محققین زیادی بر روی تعیین ضریب هدایت گرمایی سنگ اشباع شده از سیالات، کار کرده‌اند اما اکثر این مطالعات بر روی سنگ‌هایی انجام شده است که تنها با یک سیال به صورت کامل اشباع شده باشند. Aurangzeb و Maqsood ضریب هدایت گرمایی ۱۲ سنگ آذرین که به طور کامل به ترتیب با آب و هوا اشباع شده بودند را اندازه‌گیری کردند و دقت تعدادی از روابط تجربی پیش‌بینی کننده ضریب هدایت گرمایی سنگ در مورد سنگ‌های مورد آزمایش را بررسی کردند [۳]. Alishaev و همکارانش نشان دادند که رسم  $\lambda_e/\lambda_s$  برحسب  $\lambda_w/\lambda_s$  و  $\lambda_o/\lambda_s$  برای سنگ‌هایی با جنس متفاوت،

دارای روندی خطی است که در آن،  $\lambda_e$ ،  $\lambda_o$  و  $\lambda_w$  به ترتیب ضریب‌های هدایت گرمایی سنگ اشباع از سیال، نفت، آب و ماتریس سنگ است [۲]. بنابراین Alishaev و همکارانش نیز، هدایت گرمایی سنگ در حالت اشباع کامل با یک سیال را بررسی کرده‌اند. Abid و همکارانش، اثر نوع سیال بر روی ضریب هدایت گرمایی سنگ، زمانی که تنها با آن سیال اشباع شده باشد، را بررسی کردند. آن‌ها، ضریب هدایت گرمایی یک مغزه ماسه‌سنگی را هنگامی که با یک سری از مایعات به صورت ۱۰۰٪ اشباع شده بود، اندازه گرفتند. این مایعات شامل تولوئن، متانول، آب، مخلوط ۷۵٪ اتانول و ۲۵٪ آب، مخلوط ۵۰٪ اتانول و آب و مخلوط ۲۵٪ اتانول و ۷۵٪ آب (نسبت‌های حجمی) است. آن‌ها همچنین ضریب هدایت گرمایی همان سنگ را زمانی که با ترکیبات گازی شامل آرگون، نیتروژن، هلیوم، هیدروژن، مخلوط ۵۰٪ نیتروژن و هلیوم و مخلوط ۲۰٪ نیتروژن و ۸۰٪ هلیوم به صورت ۱۰۰٪ اشباع شده بود، اندازه گرفتند [۱۶]. Roy و Nagaraju نتیجه گرفتند که ضریب هدایت گرمایی سنگ خشک (اشباع کامل از هوا) از ضریب هدایت گرمایی همان سنگ هنگامی که با آب یا نفت به صورت کامل اشباع شده باشد، کمتر خواهد بود چرا که ضریب هدایت گرمایی هوا ( $0.025 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) بسیار پایین‌تر از ضریب هدایت گرمایی آب ( $0.6 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) و نفت ( $0.1-0.2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) است [۱۴]. Albert و همکارانش اثر آب و هوا را بر روی ضریب هدایت گرمایی نمونه سنگ‌هایی از ماسه، مارل و گلسنگ، زمانی که به صورت کامل از هر کدام از این سیالات اشباع شده باشند، بررسی کردند و رابطه زیر را برای تعیین اثر اشباع آب ارائه کردند [۱]:

$$\frac{\lambda_{ew} - \lambda_{ed}}{\lambda_{ew}} = 1.3 \phi^{0.62} \quad (1)$$

در معادله ۱،  $\lambda_{ed}$  و  $\lambda_{ew}$  به ترتیب ضریب هدایت گرمایی سنگ خشک و سنگ اشباع کامل از آب است. همچنین،  $\phi$  نشان‌دهنده تخلخل سنگ است.

ضرایبی هستند که به سنگ مورد مطالعه بستگی دارد [۱۲].

توسعه یک مدل جدید برای انتقال حرارت از درون سنگی که به صورت جزئی اشباع شده است

مطالعات پیشین نشان می‌دهد رسانش الکتریکی و هدایت گرمایی محیط‌های متخلخل به پارامترهای یکسانی بستگی دارند [۱۵]. در واقع این دو هدایت، هم‌ارز هستند. به همین دلیل، تلقی می‌شود که آنالوژی بین انتقال الکتریسیته و انتقال حرارت را می‌توان جهت توسعه یک مدل برای پیش‌بینی ضریب هدایت گرمایی سنگ، استفاده کرد. برای توضیح این آنالوژی، نیاز است تا معادله دوم آرچی را بررسی کنیم (معادله (۶)). این معادله بیان‌کننده رابطه بین اندیس مقاومت ( $I_R$ ) و درجه اشباع آب است. اندیس مقاومت به صورت نسبت مقاومت الکتریکی سنگی که به صورت جزئی با آب اشباع شده (سنگ حاوی چند سیال) ( $R_p$ ) و مقاومت الکتریکی سنگ با اشباع آب ۱۰۰٪ ( $R_o$ ) تعریف می‌شود.

$$I_R = \frac{\sigma_o}{\sigma_t} = \frac{R_t}{R_o} = S_w^{-n} \quad (۶)$$

در معادله ۶،  $\sigma_t$ ،  $\sigma_o$  و  $n$  به ترتیب رسانش الکتریکی سنگ با اشباع آب ۱۰۰٪، رسانش الکتریکی سنگ اشباع جزئی با آب و توان اشباع است. توجه داشته باشید که رسانش الکتریکی، عکس مقاومت الکتریکی است که در معادله ۶ و تعریف اندیس مقاومت نیز مشخص است. بررسی دقیق‌تر معادله دوم آرچی نشان می‌دهد که رسانش الکتریکی سنگ اشباع جزئی با آب ( $\sigma_t$ ) که در مخرج کسر قرار دارد، تنها تابع مقدار آبی است که در فضای متخلخل سنگ قرار دارد، چرا که در سنگ‌های فاقد اجزای جامد رسانای الکتریسیته (مانند ذرات رس)، ماتریس سنگ و سیال دیگر (در این مطالعه، گاز) عایق الکتریسیته هستند. قابل ذکر است که صورت کسر دربرگیرنده رسانش سنگ است زمانی که با آب، کاملاً اشباع شده باشد.

تمامی کارهایی که در بالا به آن‌ها اشاره شد، به بررسی ضریب هدایت گرمایی سنگ، زمانی که با یک سیال اشباع شده باشد، پرداخته‌اند. اما تعداد معدودی مطالعه نیز بر روی ضریب هدایت گرمایی سنگ‌هایی که به‌طور هم‌زمان با چند سیال مختلف اشباع شده‌اند، انجام شده است که در ادامه تعدادی از آن‌ها به اختصار بیان می‌گردد. Somerton و همکارانش رابطه تجربی زیر را برای ماسه‌های نفتی<sup>۱</sup> که به صورت جزئی با آب و نفت اشباع شده بودند، توسعه دادند:

$$\lambda_{ep} = 0.735 - 1.3 \phi + S_w^{0.5} \quad (۲)$$

آن‌ها همچنین رابطه زیر را برای ماسه‌سنگ‌هایی که به صورت جزئی با آب اشباع شده‌اند، ارائه کردند [۱۷]:

$$\lambda_{ep} = 0.735 - 1.3 \phi + 0.363 \lambda_s S_w^{0.5} \quad (۳)$$

در روابط ۲ و ۳،  $\lambda_{ep}$  هدایت گرمایی سنگی است که به صورت جزئی با آب اشباع شده و  $S_w$  درجه اشباع آب است.

Bharatha و Seto رابطه‌ای را به صورت کلی زیر برای نمونه‌های ماسه‌نفتی آتاباسکا که با آب و نفت اشباع شده بودند، ارائه نمودند:

$$\lambda_{ep} = a + b \phi^w + c S_w^x + d S_o^y + e T^z \quad (۴)$$

در این معادله،  $S_o$ ، درجه اشباع نفت،  $T$  دما و ثوابت داده‌ها به دست می‌آیند [۱۸]. Canacki و همکارانش ضریب هدایت گرمایی چند نمونه سنگ آهکی را در درجه اشباع‌های مختلف آب اندازه گرفتند. آن‌ها نتیجه گرفتند که ضریب هدایت گرمایی این سنگ‌ها با افزایش درجه اشباع آب، افزایش می‌یابد [۱۹]. Gorgulu و همکارانش اثر استرس تک-محوره و درجه اشباع آب را بر روی ضریب هدایت گرمایی چند نمونه سنگ با جنس‌های متفاوت بررسی کردند و رابطه تجربی زیر را توسعه دادند:

$$\lambda_{ep} = \lambda_o + A \sigma^p + B S_w^q \quad (۵)$$

که در آن  $\lambda_o$  ضریب هدایت گرمایی سنگ در شرایط نرمال،  $\sigma$  مقدار استرس تک-محوره و  $A$ ،  $B$ ،  $p$ ،  $q$

ضریب هدایت گرمایی اندازه‌گیری شده در این حالت بر ضریب هدایت گرمایی ماتریس سنگ دلالت دارد. همچنین در این مدل، صورت کسر به شکل  $(\lambda_{ew} - \lambda_{vac})$  تعریف می‌شود که نشان می‌دهد این عبارت فقط تابع رسانش گرمایی آب موجود در فضای متخلخل است چرا که اثر انتقال حرارت در ماتریس سنگ از طریق اعمال ضریب هدایت گرمایی در شرایط خلأ، حذف شده است. در واقع، کسر کردن  $\lambda_{vac}$  از  $\lambda_{ew}$  و  $\lambda_{ep}$  به معنی حذف اثر رسانش گرما از درون ماتریس سنگ است. بدین ترتیب، انتظار می‌رود که حاصل

این کسر که به صورت  $f(\lambda) = \frac{\lambda_{ew} - \lambda_{vac}}{\lambda_{ep} - \lambda_{vac}}$  است، تنها تابعی از درجه اشباع آب باشد. قابل ذکر است که اگر معادلات ۲ تا ۵ برای سه حالت مختلف خلأ، اشباع آب ۱۰٪ و اشباع جزئی با آب نوشته و عبارت

$f(\lambda) = \frac{\lambda_{ew} - \lambda_{vac}}{\lambda_{ep} - \lambda_{vac}}$  برای آن‌ها محاسبه شود، تمام معادلات حاصل به صورت تابعی توانی از درجه اشباع آب در می‌آیند (ستون انتهایی جدول ۱). این جدول نشان می‌دهد که تابع پیشنهادی  $f(\lambda)$  برای روابطی که در بخش مقدمه آورده شده است، به صورت تابعی توانی از درجه اشباع آب در می‌آید که به تابعیت اندیس مقاومت  $(I_R)$  به درجه اشباع آب در معادله آرچی شباهت دارد.

### روش کار آزمایشگاهی

به منظور بررسی و تأیید مدل پیشنهادی برای ضریب هدایت گرمایی سنگ در حالت اشباع جزئی با آب، ضریب هدایت گرمایی شش نمونه سنگ کربناته (از یکی از مخازن جنوب ایران) در شرایط مختلف اندازه‌گیری شد. این شرایط عبارتند از حالت اشباع کامل از آب، حالتی که به صورت جزئی از آب و هوا اشباع شده است (در ۴ درجه اشباع و برای چهار نمونه سنگ) و نهایتاً، شرایط خلأ. در ادامه این بخش، جزئیات مربوط به کار آزمایشگاهی ارائه می‌شود.

اگر معادله ۶ براساس آنالوژی برای انتقال حرارت از درون سنگی که به صورت جزئی با آب اشباع شده است، نوشته شود، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$T_R = \frac{\lambda_{ew}}{\lambda_{ep}} = S_w^{-t} \quad (7)$$

مأ، نسبت  $\lambda_{ew}/\lambda_{ep}$  را ضریب مقاومت گرمایی  $(T_R)$  و  $t$  را توان اشباع گرمایی می‌نامیم. در معادلات ۶ و ۷،  $\sigma_0$  و  $\lambda_{ew}$  دو پارامتر هم ارز هستند، چرا که به ترتیب نشان‌دهنده رسانش الکتریکی و رسانش گرمایی سنگ با اشباع آب ۱۰۰٪ می‌باشند. همچنین  $\sigma_0$  در معادله ۶ که نشان‌دهنده رسانش الکتریکی سنگی است که به صورت جزئی با آب اشباع شده است با  $\lambda_{ep}$  در معادله ۷ که نمایش‌دهنده ضریب هدایت گرمایی سنگی است که به صورت جزئی با آب اشباع شده است، هم‌ارز است. اما مقایسه معادلات ۶ و ۷، مشکلی را آشکار می‌سازد: برخلاف معادله ۶، در مخرج کسر معادله ۷ علاوه بر آب، ماتریس سنگ و سیال دیگر (در این مطالعه، گاز) نیز رسانای گرما هستند. همچنین در صورت کسر، علاوه بر آب، رسانش ماتریس سنگ نیز باید لحاظ شود. بنابراین، می‌توان گفت که معادله ۷، تنها تابعی از درجه اشباع آب نیست و هدایت گرمایی سنگ نیز بر آن اثرگذار است. بنابراین این معادله در حالت کلی، نمی‌تواند دارای کاربردی شبیه به معادله دوم آرچی باشد.

برای رفع این مشکل، یک مدل جدید پیشنهاد می‌شود که در آن، صورت و مخرج کسر، تنها تابعی از ضریب هدایت گرمایی سیالات موجود در سنگ باشند. به همین منظور تأثیر هدایت گرما در اثر ماتریس سنگ باید حذف شود. بنابراین، مخرج کسر به شکل  $(\lambda_{ep} - \lambda_{vac})$  تعریف می‌شود که در آن، اثر رسانش گرمایی ماتریس سنگ با در نظر گرفتن  $\lambda_{vac}$  حذف می‌شود.  $\lambda_{vac}$  نشان‌دهنده ضریب هدایت گرمایی سنگ در شرایط خلأ است. به عبارت دیگر، این پارامتر بیان‌کننده رسانش گرمایی سنگ است زمانی که سنگ محتوی هیچ‌گونه سیالی نباشد و بنابراین تمام گرما از فضای ماتریس سنگ می‌گذرد و

جدول ۱ بررسی مدل جدید ارائه شده برای ضریب هدایت گرمایی سنگ برای روابط تجربی مختلف

معادله	معادله	معادله	معادله
$S_w^{0.5}$	$\lambda_{ep} = 1.735 - 1.3 \phi$	$\lambda_{ep} = 0.735 - 1.3 \phi$	$\lambda_{ep} = 0.735 - 1.3 \phi + S_w^{0.5}$
$S_w^{0.5}$	$\lambda_{ep} = 0.735 - 1.3 \phi + 0.363 \lambda_s$	$\lambda_{ep} = 0.735 - 1.3 \phi$	$\lambda_{ep} = 0.735 - 1.3 \phi + 0.363 \lambda_s S_w^{0.5}$
$S_w^x$	$\lambda_{ep} = a + b \phi^w + c + e T^z$	$\lambda_{ep} = a + b \phi^w + e T^z$	$\lambda_{ep} = a + b \phi^w + c S_w^x + d S_0^y + e T^z$
$S_w^q$	$\lambda_{ep} = \lambda_0 + A \sigma^P + B$	$\lambda_{ep} = \lambda_0 + A \sigma^P$	$\lambda_{ep} = \lambda_0 + A \sigma^P + B S_w^q$

وجود دارد (contact resistance)، دو طرف سطح هر نمونه سنگ، کاملاً ساییده شد تا تغییرات ارتفاع آن به کمتر از ۰/۰۱ mm برسد. این نمونه سنگ‌ها با تولوئن و متانول، به ترتیب جهت شستن نفت و آب نمک موجود در آن‌ها با دستگاه ساکسوله شسته شده و در دمای °C ۱۰۰ در آون خشک گردیدند.

#### نمونه سنگ‌های مورد استفاده در آزمایش‌ها

شش نمونه سنگ از یکی از مخازن کربناته جنوب ایران تهیه شد. قطر این نمونه‌ها، ۳/۷ cm و ارتفاع آن‌ها از ۲/۱۷ تا ۲/۲۷ cm بود. به منظور کاهش مقاومت گرمایی که در محل تماس اجزای مختلف در دستگاه اندازه‌گیری ضریب هدایت گرمایی سنگ

است) در چهار درجه اشباع مختلف، استفاده شد. این دستگاه در محدوده وسیعی از دما (تا دمای  $150^{\circ}\text{C}$ ) و فشار محوری  $6000\text{ psi}$  عمل می‌کند. شکل ۱، شماتیک این دستگاه را نشان می‌دهد. این دستگاه دارای یک مغزه نگهدار کوچک است که نمونه سنگ با ضریب هدایت گرمایی مجهول در آن قرار می‌گیرد. مغزه نگهدار بین دو محفظه در بالا و پایین قرار دارد که هر کدام از این محفظه‌ها، حاوی یک قطعه شیشه‌ای از جنس سیلیکای فیوز شده<sup>۱</sup> با ضریب هدایت گرمایی معین است که به‌عنوان استاندارد در این دستگاه استفاده می‌شود. باید به این نکته اشاره کرد که برای جلوگیری از اتلاف گرما به محیط اطراف، تمام محفظه‌ها به‌وسیله عایق تفلونی پوشیده شده است.

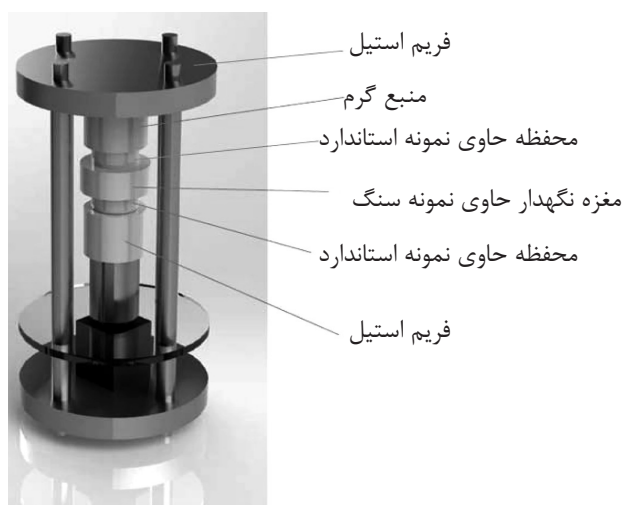
پس از آن، اندازه‌گیری تخلخل سنگ‌ها با روش اشباع مجدد انجام و ترکیبات کانی‌شناسی این نمونه سنگ‌ها از طریق تست XRD تعیین شد. جدول ۲، خواص نمونه سنگ‌های مورد استفاده را نشان می‌دهد. این نمونه‌ها شامل سه نمونه از جنس کلسیت (C1, C2, C3) و سه نمونه دولومیتی (D1, D2, D3) با تخلخل‌های متفاوت است.

#### اندازه‌گیری ضریب هدایت گرمایی سنگ در شرایط مختلف

دستگاه پایدار (divided bar steady-state) divided bar apparatus که در دانشگاه صنعت نفت طراحی و ساخته شده است برای اندازه‌گیری ضریب هدایت گرمایی سنگ در حالت خلأ، حالت کاملاً اشباع از آب و به‌صورت جزئی اشباع از آب (فاز دوم، هوا

جدول ۲ مشخصات سنگ‌های مورد مطالعه

نمونه سنگ	ترکیب کانی‌شناسی	ارتفاع (cm)	تخلخل (%)
C1	کلسیت	۲/۱۷	۹/۲
C2	کلسیت	۲/۲۲	۶/۸
C3	کلسیت	۲/۱۹	۸/۱
D1	دولومیت	۲/۲۰	۱۶/۱
D2	دولومیت	۲/۲۷	۱۲/۵
D3	دولومیت	۲/۲۱	۱۴/۲



شکل ۱ شماتیک دستگاه اندازه‌گیری ضریب هدایت گرمایی سنگ

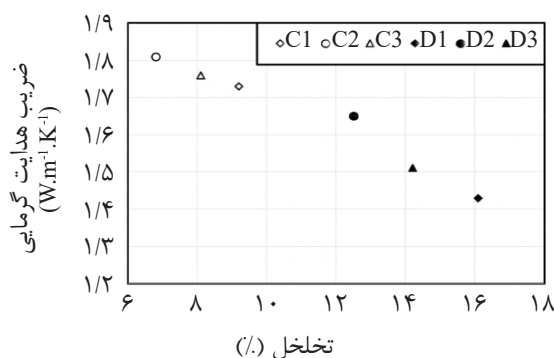
### بحث و نتایج

در ابتدا، ضریب هدایت گرمایی شش نمونه سنگ مورد مطالعه در شرایط خلأ در آزمایشگاه اندازه‌گیری شد. در این آزمایش‌ها، شرایط خلأ به‌وسیله پمپ خلأ متصل به دستگاه اندازه‌گیری هدایت گرمایی سنگ، ایجاد گردید. در شکل ۲، مقدار  $\lambda_{vac}$  برای شش نمونه سنگ برحسب تخلخل آن‌ها رسم شده است. همان‌گونه که در شکل مشخص است، مقدار ضریب هدایت گرمایی در شرایط خلأ با افزایش تخلخل کاهش می‌یابد، چرا که بخش زیادی از حرارت از ماتریس سنگ عبور می‌کند. همچنین، این نمودار نشان می‌دهد با توجه به اینکه تخلخل نمونه‌های کلسیتی از نمونه‌های دولومیتی به مقدار قابل توجهی کمتر است، دارای ضریب هدایت گرمایی به نسبت بیشتری هستند. بدین ترتیب نمونه C2 دارای بیشترین مقدار  $\lambda_{vac}$  و نمونه D1 دارای کمترین  $\lambda_{vac}$  است. در مرحله بعد، ضریب هدایت گرمایی چهار نمونه سنگ کربناته - C1, C2, D1, D2- در پنج میزان مختلف اشباع آب اندازه‌گیری شد. یکی از این درجه اشباع‌ها، حالت اشباع کامل از آب (اشباع آب ۱۰۰٪) است. فاز دوم در این آزمایش‌ها، هوا است. شکل ۳، ضریب هدایت گرمایی سنگ‌ها را در حالت اشباع کامل و در حالتی که به‌صورت جزئی از آب اشباع شده است ( $\lambda_{ep}$ )، برحسب درجه اشباع آب نشان می‌دهد.

به منظور اعمال فشار محوری با پمپ که در این آزمایش‌ها ۱۱۰۰ psi بوده است، تمام اجزای دستگاه درون یک چهارچوب از جنس استیل ضد زنگ قرار گرفته است. سنسورهای دما در دو طرف دو استاندارد که در بالا و پایین نمونه سنگ موجود در مغزه نگهدار قرار دارند، دما را اندازه‌گیری می‌کنند. منبع گرم که در بالای چهارچوب قرار دارد در دمای  $32^\circ\text{C}$  و منبع سرد که در پایین چهارچوب جا گرفته است در دمای  $22^\circ\text{C}$  تنظیم می‌شود. هنگامی که شرایط پایدار برقرار شد، با استفاده از قانون فوریه و طبق معادله زیر می‌توان ضریب هدایت گرمایی سنگ را در شرایط مختلف به‌دست آورد:

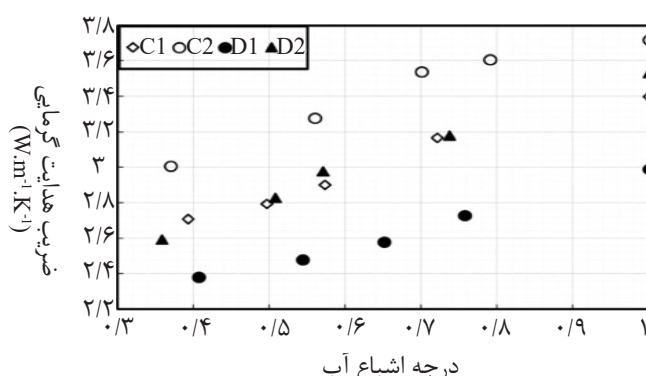
$$\lambda_c \frac{\Delta T_2}{L_c} = \lambda_{st} \frac{\Delta T_1 + \Delta T_3}{2 L_{st}} \quad (8)$$

که در آن  $\lambda_c$  ضریب هدایت گرمایی سنگ،  $\lambda_{st}$  ضریب هدایت گرمایی نمونه استاندارد (سیلیکای فیوز شده)،  $L_c$  ارتفاع سنگ،  $L_{st}$  ارتفاع نمونه استاندارد،  $\Delta T_2$  اختلاف دمای دو سر سنگ و  $\Delta T_1, \Delta T_3$  اختلاف دمای دو سر نمونه استاندارد در بالا و پایین مغزه نگهدار است. یادآور می‌شود، جهت کاهش مقاومت تماسی بین نمونه سنگ و نمونه‌های استاندارد از چسب سیلیکونی استفاده می‌شود. همچنین، فشار محوری ۱۱۰۰ psi باعث بهبود تماس بین نمونه سنگ، نمونه‌های استاندارد و همچنین، منابع گرم و سرد می‌شود.



شکل ۲ ضریب هدایت گرمایی در شرایط خلأ برای شش نمونه سنگ



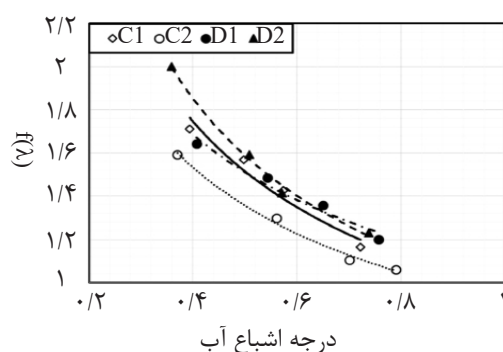


شکل ۳ ضریب هدایت گرمایی چهار نمونه سنگ که به صورت جزئی با آب اشباع شده‌اند برحسب درجه اشباع آب

سنگ ( $\lambda_{ep}$ ) نسبت به درجه اشباع در اشباعات کمتر از ۰/۷ بیشتر از نرخ این تغییرات در اشباعات بالاتر است. به عبارتی دیگر، تأثیر درجه اشباع آب بر  $\lambda_{ep}$  تا اشباع ۰/۷ شدیدتر است و پس از این درجه اشباع، افزایش درجه اشباع آب اثر کمتری بر مقدار ضریب هدایت گرمایی سنگ می‌گذارد. به منظور بررسی تابع  $f(\lambda)$  که براساس آنالوژی با معادله آرچی و اعمال اصلاحات جهت لحاظ کردن اثر انتقال حرارت درون ماتریس سنگ ارائه گردید، مقدار این تابع برای سنگ‌های مختلف و در درجات اشباع مختلف محاسبه شد و سپس برحسب درجه اشباع آب رسم گردید (شکل ۴). جهت بررسی شباهت بین تابع تازه تعریف  $f(\lambda)$  و پارامتر  $I_R$  در معادله آرچی، معادلات توانی بر داده‌های هر سنگ در شکل ۴ برآزش شد. همان‌گونه که در شکل مشخص است برای تمام سنگ‌ها، معادلات توانی به‌خوبی بر روی داده‌های آزمایشگاهی  $f(\lambda)$  برحسب درجه اشباع آب برآزش شده است. جدول ۳، معادلات برآزش شده و ضرایب تعیین ( $R^2$ ) آن‌ها را نشان می‌دهد. مقدار بالای ضرایب تعیین برای تمامی معادلات برآزش شده، نشان می‌دهد که تابع جدید  $f(\lambda)$  نیز مانند  $I_R$  با درجه اشباع آب به‌صورت توانی در ارتباط است. این جدول آشکار می‌سازد که توان درجه اشباع در شکل ۴ از ۰/۴۹ تا ۰/۶۹ تغییر می‌کند که با مقدار پیش‌فرض توان درجه اشباع در معادله دوم آرچی که ۲ است، بسیار متفاوت است.

همان‌طور که در این شکل مشخص است، با افزایش درجه اشباع آب- یا کاهش درجه اشباع هوا- ضریب هدایت گرمایی سنگ افزایش می‌یابد، چرا که ضریب هدایت گرمایی آب بسیار بیشتر از ضریب هدایت گرمایی هوا است و با افزایش درجه اشباع آب، سهم آب در انتقال حرارت به نسبت سهم هوا بیشتر می‌شود. همان‌طور که در جدول ۱ مشخص است، ترکیبات کانی‌شناسی نمونه سنگ‌های D1 و D2 یکسان است، بنابراین مقدار بیشتر  $\lambda_{ep}$  برای نمونه D2 نسبت به نمونه سنگ D1 به‌دلیل پایین بودن تخلخل آن است. ضریب هدایت گرمایی نمونه سنگ‌های C1 و D2 به هم نزدیک هستند. اگرچه نمونه سنگ C1 محتوی کلسیت است که ضریب هدایت گرمایی آن ( $\lambda_{calcite} \cong 3.6 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) از دولومیت ( $\lambda_{dolomite} \cong 5.5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) (ترکیب کانی‌شناسی نمونه D2) کمتر است اما نمونه C1 تخلخل کمتری نسبت به نمونه سنگ D2 دارد. این دو اثر متضاد باعث نزدیکی ضریب هدایت گرمایی این دو نمونه شده است. شکل ۳ همچنین نشان می‌دهد که ضریب هدایت گرمایی نمونه کلسیتی C1 از نمونه دولومیتی D1 بزرگ‌تر است که این به‌دلیل اختلاف قابل ملاحظه تخلخل این دو نمونه است. در میان نمونه‌های مورد آزمایش، نمونه C2 دارای بیشترین ضریب هدایت گرمایی است که به‌دلیل کم بودن قابل توجه مقدار تخلخل آن در مقایسه با سه نمونه دیگر است. همچنین، این شکل نشان می‌دهد که نرخ تغییرات ضریب هدایت گرمایی





شکل ۴ پارامتر  $f(\lambda)$  برحسب درجه اشباع آب

جدول ۳ معادلات برازش شده و ضرایب تعیین آن‌ها برای داده‌های شکل ۴

نمونه سنگ	معادله برازش شده	$R^2$
C1	$f(\lambda) = 0.97 S_w^{-0.64}$	۰/۹۶
C2	$f(\lambda) = 0.93 S_w^{-0.55}$	۰/۹۹
D1	$f(\lambda) = 1.08 S_w^{-0.49}$	۰/۹۶
D2	$f(\lambda) = 0.99 S_w^{-0.69}$	۰/۹۹
همه نمونه سنگ‌ها	$f(\lambda) = 0.99 S_w^{-0.60}$	۰/۹۳

برای چهار نمونه از این شش نمونه، ضریب هدایت گرمایی در حالت اشباع کامل از آب و حالت اشباع جزئی از آب (چهار درجه اشباع مختلف آب در حضور هوا)، تعیین گردید. نتایج نشان داد که با افزایش تخلخل، مقدار ضریب هدایت گرمایی در حالت خلأ کاسته می‌شود. همچنین آشکار شد که با افزایش درجه اشباع آب، در همه نمونه‌های سنگ، ضریب هدایت گرمایی سنگ افزایش می‌یابد که به دلیل بیشتر بودن ضریب هدایت گرمایی آب نسبت هوا است. علاوه بر این، در این مطالعه یک مدل ریاضی بر اساس تشابه بین جریان الکتریسیته و انتقال حرارت درون سنگ برای بررسی انتقال حرارت در سنگ‌هایی که به صورت جزئی با آب اشباع شده‌اند، پیشنهاد شد. تابع ارائه شده در مدل جدید انتقال حرارت، براساس شباهت با اندیس مقاومت ( $I_R$ ) در معادله آرچی تعریف شده است.

این مسئله نشان می‌دهد نحوه اثرگذاری درجه اشباع آب بر انتقال حرارت در سنگ، با اثرگذاری آن بر انتقال الکتریسیته، بسیار متفاوت است چرا که بر خلاف الکتریسیته که از درون فضای متخلخل سنگ جریان دارد، بخش عمده‌ای از میزان حرارت از درون ماتریس سنگ عبور می‌کند. ردیف انتهایی جدول ۳، معادله توانی برازش شده بر تمام داده‌های موجود در شکل ۴ را نشان می‌دهد که دارای ضریب تعیین بالایی است و توان درجه اشباع در آن ۰/۶ است.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله، ضریب هدایت گرمایی شش نمونه سنگ از یکی از مخازن کربناته جنوب ایران در حالت خلأ، با دستگاهی که در دانشگاه صنعت نفت طراحی و ساخته شد، اندازه‌گیری شد. همچنین،

مقدار توان اشباع ( $n$ ) در معادله آرچی که به صورت پیش فرض برابر با ۲ در نظر گرفته می شود، بسیار متفاوت است. این موضوع اثرگذاری متفاوت درجه اشباع آب بر روی انتقال حرارت و انتقال الکتریسیته را نشان می دهد.

داده های آزمایشگاهی این کار به خوبی نشان می دهد که پارامتر جدید نیز همانند  $I_R$  با درجه اشباع آب به صورت توانی مرتبط است. معادلات توانی برآزش شده این تابعیت را تأیید می کند. قابل ذکر است که توان درجه اشباع در مدل انتقال حرارت بین ۰/۴۹ تا ۰/۶۹ تغییر می کرد که با

## مراجع

- [1]. Albert K., Schulze M., Franz C., Koenigsdorff R. and Zosseder K., "Thermal conductivity estimation model considering the effect of water saturation explaining the heterogeneity of rock thermal conductivity," *Geothermics*, Vol. 66, pp. 1-12, 2016.
- [2]. Alishaev M. G., Abdulagatov I. M., and Abdulagatova Z. Z., "Effective thermal conductivity of fluid-saturated rocks: experiment and modeling", *Engineering Geology*, Vol. 135, pp. 24-39, 2012.
- [3]. Aurangzeb and Maqsood. A., "Modeling of the effective thermal conductivity of consolidated porous media with different saturants: a test case of gabbro rocks," *International Journal of Thermophysics*, Vol. 28, No. 4, pp. 1371-1386, 2007.
- [4]. Sugawara A. and Yoshizawa Y., "An investigation on the thermal conductivity of porous materials and its application to porous Rock," *Australian Journal of Physics*, Vol. 14, No. 4, pp. 469-480, 1961.
- [5]. Woodside. W., and Messmer. J., "Thermal conductivity of porous media. I. Unconsolidated sands," *Journal of Applied Physics*, Vol. 32, No. 9, pp. 1688-1699, 1961.
- [6]. Brailsford A. and Major K., "The thermal conductivity of aggregates of several phases, including porous materials," *British Journal of Applied Physics*, Vol. 15, No. 3, p. 313, 1964.
- [7]. Anand J., Somerton W. H. and Gomma E., "Predicting thermal conductivities of formations from other known properties," *Society of Petroleum Engineers Journal*, Vol. 13, No. 5, pp. 267-273, 1973.
- [8]. Sekiguchi K., "A method for determining terrestrial heat flow in oil basinal areas," *Tectonophysics*, Vol. 103, No.1, pp. 67-79, 1984.
- [9]. Bauer T., "A general analytical approach toward the thermal conductivity of porous media," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 36, No. 17, pp. 4181-4191, 1993.
- [10]. Maqsood A. and Kamran K., "Thermophysical properties of porous sandstones: measurements and comparative study of some representative thermal conductivity models," *International Journal of Thermophysics*, Vol. 26, No.5, pp. 1617-1632, 2005.
- [11]. Popov Y., Tertychnyi V., Romushkevich R., Korobkov D. and Pohl J., "Interrelations between thermal conductivity and other physical properties of rocks: experimental data," *Pure and Applied Geophysics*, Vol. 160, pp. 1137-1161, 2003.
- [12]. Görgülü K., Duruturk Y. S., Demirci A. and Poyraz B., "Influences of uniaxial stress and moisture content on the thermal conductivity of rocks," *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 45, No. 8,

pp. 1439-1445, 2008.

[13]. Abdulagatova Z., Abdulagatov I. and Emirov V., "*Effect of temperature and pressure on the thermal conductivity of sandstone*," International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol. 46, No. 6, pp. 1055-1071, 2009.

[14]. Nagaraj P. and Roy S., "*Effect of water saturation on rock thermal conductivity measurements*," Tectonophysics, Vol. 626, pp. 137-143, 2014.

[15]. Mohammadmoradi P., Behrang A, Taheri S. and Kantzas A., "*Thermal conductivity of partially saturated microstructures*," International Journal of Thermal Sciences, Vol. 112, pp. 289-303, 2017.

[16]. Abid M., Hammerschmidt U. and Köhler J., "*Thermophysical properties of a fluid-saturated sandstone*," International Journal of Thermal Sciences, Vol. 76, pp. 43-50, 2014.

[17]. Somerton W. H., Keese J. A. and Chu S. L., "*Thermal behavior of unconsolidated oil sands*," Society of Petroleum Engineers Journal, Vol. 14, No. 5, pp. 513-521, 1974.

[18]. Seto A. and Bharatha S., "*Thermal conductivity estimation from temperature logs*," in SPE International Thermal Operations Symposium, Society of Petroleum Engineers, 1991.

[19]. Çanakci H., Demirboga R., Karakoc M. B. and Sirin O., "*Thermal conductivity of limestone from Gaziantep (Turkey)*," Building and Environment, Vol. 42, No. 4, pp.1777-82, 2007.



# Development of a Mathematical Model for Estimating Rock Thermal Conductivity Using Analogy between Electricity Transmission and Heat Transfer

Aboozar Soleymanzadeh, Abbas Helalizadeh\*, Mohammad Jamialahmadi and Bahram Soltani Soulgani

Ahvaz Faculty of Petroleum, Petroleum University of Technology (PUT), Iran

helalizadeh@put.ac.ir

DOI: 10.22078/pr.2019.3654.2668

Received: February/23/2019

Accepted: June/26/2019

## Introduction

Thermal conductivity of a porous medium depends on several factors such as matrix properties (for example mineralogical composition, grain shape, grain size and cementation), pore space properties (such as porosity, porosity type, geometrical configuration of pores, distribution of the pores, pore filling fluids and their saturations), temperature range and the exerted stress on the rock [1-6]. Also, prediction of thermal conductivity of porous media is associated with high level of uncertainty due to their complicated structure. Moreover, numerous experimental methods, empirical correlations and theoretical models have been reported in the literature to predict thermal conductivity of a saturated porous medium. But most of them are limited to the porous medium which is saturated with single phase [7].

In this paper, thermal conductivity of six carbonate rock samples from an Iranian reservoir was measured at vacuum condition ( $\lambda_{vac}$ ). In addition, thermal conductivity of four plugs of these six samples was determined at fully water saturated ( $\lambda_{ew}$ ) and

partially water saturated ( $\lambda_{ep}$ ) conditions. Also, based on the analogy between electricity transmission and heat transfer through porous media, a new model was presented to predict rock thermal conductivity at different water saturations.

## Development of a new model for heat transfer through a partially water saturated rock

Analogy between electricity transmission and heat transfer can be used to establish a model to predict thermal conductivity. Archie's second equation, i.e. Equation 1, is used to investigate this analogy. This equation extends relationship between electrical resistivity index ( $I_R$ ) and water saturation ( $S_w$ ):

$$I_R = \frac{\sigma_o}{\sigma_t} = S_w^{-n} \quad (1)$$

where,  $\sigma_o$ ,  $\sigma_t$  and  $n$  are electrical conductivities of fully water saturated rock, electrical conductivity of partially water saturated rock and saturation exponent respectively.

If Equation 1 is written for heat transfer through a partially water saturated rock, Equation 2 is obtained:

$$T_R = \frac{\lambda_{ew}}{\lambda_{ep}} = S_w^{-t} \quad (2)$$

where, fraction of  $\lambda_{ew}/\lambda_{ep}$  and  $t$  are called as thermal resistivity index ( $T_R$ ) and thermal saturation exponent respectively.

A closer look at the Equation 1 reveals that the electrical conductivity of partially saturated rock (denominator of Equation 1) is just a function of the amount of water in the pore space. Because air and rock matrix are very poor electrical conductors. The numerator of Equation 1 includes electrical conductivity of fully water saturated rock. Therefore, resistivity index, as a ratio of mentioned numerator and denominator, would be a function of water saturation. Now, if we want to write an equation similar to Equation 1 based on the analogy between electricity transmission and heat transfer, Equation 2 is obtained. But by making a comparison between Equation 1 and Equation 2, a problem is revealed. Despite the Equation 1, at the denominator of Equation 2, beside water, air and rock matrix conduct heat as well. Also, at the numerator of Equation 2, water and rock matrix transfer heat. Thus, in general, Equation 2 is not just a function of water saturation. Hence, this equation cannot be used same as Equation 1.

To resolve this problem, a new model is introduced in which the numerator and denominator are functions of thermal conductivity of resident fluids solely. Therefore, the numerator is defined as  $\lambda_{ew} - \lambda_{vac}$ , in which the effect of rock matrix has been excluded by considering  $\lambda_{vac}$ .  $\lambda_{vac}$  is thermal conductivity of the rock sample at vacuum condition. In other words, this parameter implies thermal conductivity of the rock sample when

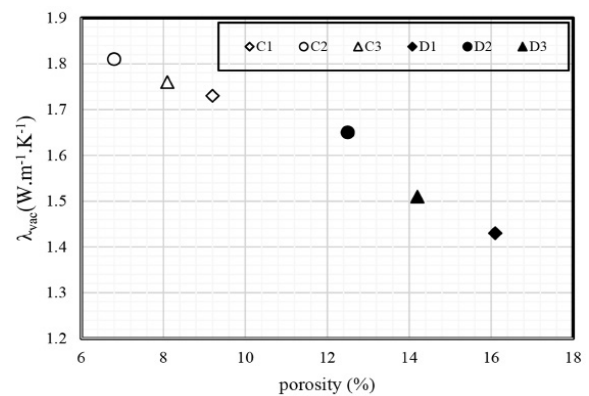
it contains no fluid. Also, in the new model, the denominator is expressed as  $\lambda_{ep} - \lambda_{vac}$  which implies that denominator is just function of thermal conductivity of saturating fluids. In this way, it is expected that the quotient of defined numerator and denominator ( $f(\lambda) = \frac{\lambda_{ew} - \lambda_{vac}}{\lambda_{ep} - \lambda_{vac}}$ ) is a function of water saturation.

### Experimental procedure

Divided bar steady-state technique was applied for measuring thermal conductivity of six carbonate plug samples at vacuum condition, fully water saturated and partially water saturated conditions (four different water saturations).

### Results and Discussion

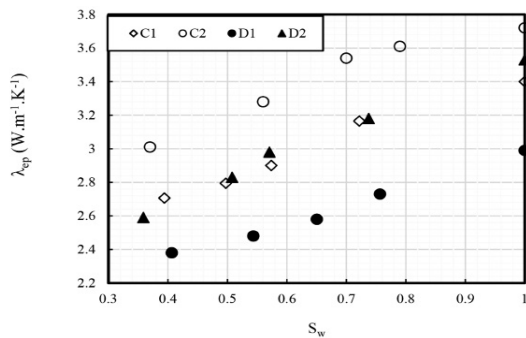
In Figure 1, thermal conductivity of six plugs at vacuum condition versus porosity is depicted. It is evident that  $\lambda_{vac}$  increases as porosity decreases.



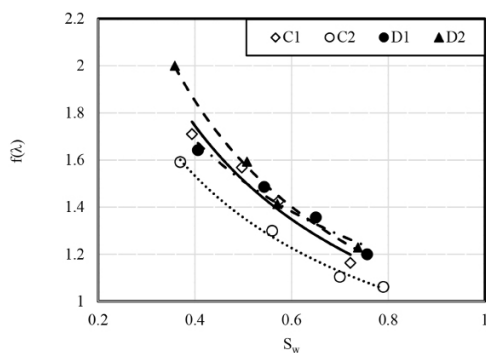
**Figure 1:** Thermal conductivity at vacuum condition versus porosity for six plugs.

Thermal conductivity of four plug samples, C1, C2, D1 and D2, was measured at five different degrees of water saturation. One of these saturations was 100% water saturation. The second phase in these experiments was air. Figure 2 shows thermal conductivity of partially saturated plugs ( $\lambda_{ep}$ ) versus water saturation. It is obvious that  $\lambda_{ep}$  increases with an increase in water saturation or decreasing air content. This

is due to the higher value of water thermal conductivity with respect to air thermal conductivity. Mineralogical compositions of plug samples *D2* and *D1* are the same. Therefore, higher value of  $\lambda_{ep}$  of plug *D2* is related to its lower porosity. In addition,  $\lambda_{ep}$  of plugs *C1* and *D2* are close to each other. Although the plug *C1* contains calcite with lower thermal conductivity than dolomite, plug *C1* has lower porosity than plug *D2*. These two opposite effects lead to closeness of  $\lambda_{ep}$  of plugs *C1* and *D2*. Also, Figure 2 illustrates that  $\lambda_{ep}$  of plug *C1* is obviously greater than plug *D1* that is related to significant difference between their porosities. Plug *C2* has the highest  $\lambda_{ep}$  because it has the lowest value of porosity.



**Figure 2:** Thermal conductivity versus water saturation.  $f(\lambda)$  was plotted versus water saturation for all plugs in Figure 3 to investigate applicability of the new model. Furthermore, power equations were fitted to the data of Figure 3 to examine similarity between  $f(\lambda)$  in the new model and  $I_R$  in Archie’s equation.



**Figure 3:**  $f(\lambda)$  versus water saturation for all plugs.

Table 1 presents fitted equations and their corresponding determination coefficients ( $R^2$ ). High value of  $R^2$  of fitted equations confirms similarity between the proposed model of  $\lambda_{ep}$  and second Archie’s equation. Also, this table reveals that saturation exponent in the new model changes from 0.49 to 0.69 which is very different from typical value of saturation exponent ( $n=2$ ) in Archie’s second equation. Moreover, this implies that water saturation affects the heat transfer and electricity transmission in two different ways. Last row of Table 1 shows power equation that includes thermal conductivity data of three plugs.

**Table 1:** Fitted equations and their corresponding determination coefficients of data in Figure 3.

Plug No.	Fitted equation	$R^2$
C1	$f(\lambda) = 0.97S_w^{-0.64}$	0.96
C2	$f(\lambda) = 0.95S_w^{-0.55}$	0.99
D1	$f(\lambda) = 1.08S_w^{-0.49}$	0.96
D2	$f(\lambda) = 0.99S_w^{-0.69}$	0.99
All plugs	$f(\lambda) = 0.99S_w^{-0.60}$	0.93

## CONCLUSIONS

In this paper, thermal conductivity of six carbonate plugs was measured at vacuum condition, fully water saturated and partially saturated conditions. Results showed that thermal conductivity at vacuum condition increases with a decrease in porosity. Also, it was observed that thermal conductivity increases with an increase in water saturation ( $S_w$ ). Furthermore, a new model was suggested to predict rock thermal conductivity based on the analogy between heat transfer and electrical flow. Finally, the results revealed that function  $f(\lambda)$ , in the new model, is a power function of  $S_w$  similar to the dependency

of resistivity index on  $S_w$  in Archie's equation. But the exponent of  $S_w$  in the new model changes from 0.49 to 0.69 which is different from the typical value of saturation exponent in Archie's equation ( $n=2$ ).

## REFERENCES

- [1]. Sugawara A. and Yoshizawa Y., "An investigation on the thermal conductivity of porous materials and its application to porous Rock," Australian Journal of Physics, Vol. 14, No. 4, pp. 469-480, 1961.
- [2]. Woodside. W., and Messmer. J., "Thermal conductivity of porous media. I. Unconsolidated sands," Journal of Applied Physics, Vol. 32, No. 9, pp. 1688-1699, 1961.
- [3]. Anand J., Somerton W. H. and Gomma E., "Predicting thermal conductivities of formations from other known properties," Society of Petroleum Engineers Journal, Vol. 13, No. 5, pp. 267-273, 1973.
- [4]. Popov Y., Tertychnyi V., Romushkevich R., Korobkov D. and Pohl J., "Interrelations between thermal conductivity and other physical properties of rocks: experimental data," Pure and Applied Geophysics, Vol. 160, pp. 1137-1161, 2003.
- [5]. Abdulagatova Z., Abdulagatov I. and Emirov V., "Effect of temperature and pressure on the thermal conductivity of sandstone," International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol. 46, No. 6, pp. 1055-1071, 2009.
- [6]. Nagaraj P. and Roy S., "Effect of water saturation on rock thermal conductivity measurements," Tectonophysics, Vol. 626, pp. 137-143, 2014.
- [7]. Mohammadmoradi P., Behrang A, Taheri S. and Kantzas A., "Thermal conductivity of partially saturated microstructures," International Journal of Thermal Sciences," Vol. 112, pp. 289-303, 2017.